

Взаимодействие вращающихся масс в вакууме: эксперимент Самохвалова и вращение спиральных галактик

В.И. Сбитнев¹

Аннотация—В дополнение к эффекту Казимира, описывающему силы, которые возникают между двумя пластинами за счет селекции вакуумных флуктуаций между ними, могут возникать еще моменты сил. Они обусловлены формированием вихрей в вакууме за счет самоорганизации гигантского числа флуктуирующих пар 'частица-античастица', которые совершают вращение вокруг общего центра массы такой пары. Эти вихри могут передавать вращательный момент с одного, вращающегося, диска на другой, изначально неподвижный. Также такой вращательный момент может быть ответственным, вместо пресловутой темной материи, за стабилизацию орбитальной скорости рукавов спиральных галактик. Уравнения Навье-Стокса, со слегка модифицированными внутренними силами (градиент давления и флуктуирующая вязкость в сверхтекучей вакуумной среде), дают ясную картину формирования таких вихрей.

I. ВВЕДЕНИЕ

Заключительные фразы М. Осипова, приведенных в его статье "Взаимодействие вращающихся тел и общие принципы симметрии" [1], звучат так: "Необходимо отметить также, что за рамками данного рассмотрения пока остались два важных эффекта. Во-первых, в опытах В.Н. Самохвалова взаимодействие возникает не сразу, а с некоторым (макроскопическим) запаздыванием, т.е. проявляются очень сильные эффекты временной нелокальности. Аналогичные взаимодействия в традиционной физике неизвестны и единственным простым аналогом является явление резонанса, когда энергия закачивается в систему постепенно. Во-вторых, непонятно, почему это взаимодействие экранируется достаточно разреженной средой, т.е. воздухом".

Приняв это высказывание, как призыв к продолжению дискуссии, продолжим ее в несколько ином ракурсе. Эксперимент Самохвалова [2] предполагает существование хорошего вакуума между двумя не ферромагнитными дисками. Здесь не будем без нужды оста-

навливаться на деталях данного эксперимента. Можно прямо обратиться к описанию эксперимента в его статье [2], если на то возникнет острая необходимость.

Будем исходить из предположения, что взаимодействие между дисками достигается за счет механизмов самоорганизации элементарных вихрей, существующих в физическом вакууме благодаря гигантскому количеству пар частиц и античастиц [3]. За счет этого крутящий момент передается с одного вращающегося диска к другому, не вращающемуся. Как результат, происходит захват не вращающегося диска в единый ритм с вращающимся.

Эксперимент, поставленный Самохваловым и детально описанным им в статье [2], охватывает горизонты значительно более широкие, чем это может показаться с первого взгляда. Пожалуй, наиболее интересным следствием эксперимента может быть постановка под вопрос так называемой "темной материи" – той самой неясной субстанции, которая якобы ответственна за постоянство орбитального движения рукавов спиральных галактик вокруг ядра [4]. По сути, здесь также имеет место захват звездных скоплений в единый ритм. Это выражается в стабилизации орбитального движения звезд, вплоть до звезд, расположенных на краях галактики.

Статья организована следующим образом. Глава II начинается с качественного описания относительно хорошо изученного эффекта Казимира [5]. Важную роль здесь играют скалярные моды флуктуаций вакуума – моды, которые описываются с привлечением скалярного потенциала. В корне отличная ситуация имеет место в случае вращательных мод флуктуаций вакуума, обусловленных существованием векторного потенциала. Чтобы продвинуться в понимании роли вращательных мод, обратимся к наблюдениям, полученных при изучении вихревых пучков в жидком гелии [7]. Суть в том, что жидкий гелий являет собой прекрасную модель физического вакуума [8], [9]. Этим обсуждением заканчивается данная глава. В главе III объявляется, что гидродинамика физического вакуума в нерелятивистском приближении вполне строго описывается слегка модифицированными уравнениями Навье-Стокса [3].

¹ Санкт-Петербургский институт ядерной физики им. Б. П. Константинова, НИЦ 'Курчатовский институт', Гатчина, Ленинградской обл., 188350; University of California, at Berkeley, Berkeley, CA 94720, USA, valery.sbitnev@gmail.com.

Данные модификации приводят к двум важным исходам: (а) скалярный потенциал лежит в основе получения уравнения Шредингера; (б) тогда как векторный потенциал ведет к получению уравнения, описывающего вихри. Забегая вперед, важно подчеркнуть, что введенная модификация (флуктуирующая вокруг нуля вязкость вакуумной среды) приводит: (i) к сколь угодно длительному существованию вихрей; (ii) к вихрю с конечным радиусом ядра; (iii) к дрожанию вихря во времени. В главе IV обсуждаются факты стационарного вращения рукавов спиральных галактик в свете обмена вращательной энергии барионной материи с нулевыми флуктуациями вакуума. Показывается, что нет нужды привлекать темную материю для объяснения стационарности вращения. Глава V заключительная и в ней дается краткая философская характеристика затронутых проблем.

II. БАРИОННАЯ МАТЕРИЯ ПОД СИЛОВЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ ФИЗИЧЕСКОГО ВАКУУМА

Из барионов (протонов, нейтронов) построена подавляющая часть наблюдаемого нами вещества вселенной. Сюда также следует добавить лептоны, в первом поколении которых есть такая важная частица, как электрон. Эти три частицы – протон, нейтрон и электрон, представляют основу материи, данной нам в ощущениях. Можно догадываться, что сами эти частицы являются долгоживущими возбуждениями вакуума. Иными словами, основой всего является физический вакуум, на фоне которого разворачивается драма, созерцаемая человеческим разумом, который сам является участником этой драмы.

Не будем продолжать эту философскую мысль дальше. Заметим только, что такая эфемерная среда, называемая ранее эфиром, присутствует везде и всюду. Барионная материя оказывается под непрерывным влиянием этой среды. Не всегда такое предположение приветствовалось. В начале 20-го века эфир был отвергнут, не прошедший экспериментальной верификации. А вся наблюдаемая материя эволюционирует в вакууме. Долгое время вакуум был синонимом пустоты, населенный атомами Демокрита, которые сталкиваются, существуют какое-то время вместе, а потом снова разбегаются врозь [10].

С другой стороны, в начале 20-го века были заложены основы квантовой механики. В согласии с ее выводами, пространство не может быть пустым, но в нем постоянно случаются квантовые низкоэнергетические флуктуации – на короткое время рождаются из небытия частицы и тут же исчезают. Такое постоянное рождение и исчезновение частиц не может проходить бесследно для объектов, населяющих пространство. Примером может являться эффект Казимира [11].

А. Эффект Казимира: скалярные моды вакуумных флуктуаций

В 1947 г. голландский физик Хендрик Казимир предсказал возможность притяжения двух незаряженных

пластин, разделенных пустым пространством, за счет энергетических колебаний физического вакуума [5]. Позднее этот эффект был подтвержден экспериментально. Согласно квантовой теории поля, физический вакуум не является абсолютно пустым. В нём постоянно рождаются и исчезают пары виртуальных частиц и античастиц. Такая среда представляет собой идеальную сверхтекучую жидкость, представленную ансамблем виртуальных пар, чутко реагирующим на любые подвижки в ней. Эти пары, по сути, являются Бозе-частицами. Попросту говоря, частицами с нулевым спином, которые могут представлять скалярные колебательные моды. Длины волн части этих мод могут кратно укладываться между двумя пластинами (как это имеет быть в резонаторе). Только конечное число таких мод может быть уложено между ними. Тогда как вне этого ограниченного пространства количество мод ничем не ограничено. Эта разница в количестве мод между пластинами и вне их и вызывает силу притяжения пластин, названной эффектом Казимира. Внешне это напоминает такой же эффект притяжения двух корпусов кораблей, идущих рядом друг с другом параллельным курсом. Эффект Казимира проявляется из-за селекции простейших колебательных мод (скалярных волн), заключенных в ограниченном пространстве между пластинами.

В. Скрученные вихревые пучки

На основе скалярных волн, рассмотренных выше, невозможно объяснить наблюдаемый захват диска крутящим моментом в эксперименте Самохвалова [2]. Здесь необходимо привлекать механизмы, ответственные за кручение – хиральность (chirality), представляемое правилом правой руки, Рис. 1.

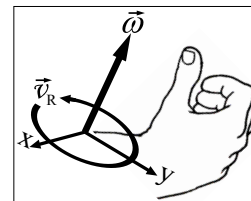


Рис. 1. Правило правой руки: четыре пальца правой руки показывают направление вращения, большой палец показывает направление вектора завихренности $\vec{\omega}$

Подмечено, что жидкий гелий представляет собой исключительно хорошую модель физического вакуума [8]. Поэтому результаты экспериментов, проводимых на жидком гелии могут дать пищу для размышлений о том, что может происходить в физическом вакууме. Как известно, в жидком гелии электроны образуют Куперовские пары – частицы с нулевым спином, а в ансамбле представляющие Бозе-Эйнштейна конденсат. В физическом вакууме такой конденсат образовывается за счет спаривания частиц и античастиц. Следует иметь в виду, что вакуумные флуктуации

представляются постоянной аннигиляцией и рождением частиц и античастиц. Такая экзотическая пара, по сути, взаимно уничтожается и вновь рождается (флуктуирует) на нижней Боровской орбите. Таким образом в вакууме всегда существуют естественные элементарные вихри, образованные из вращающихся вокруг общего центра масс частиц и античастиц, которые периодически аннигилируют и рождаются вновь.

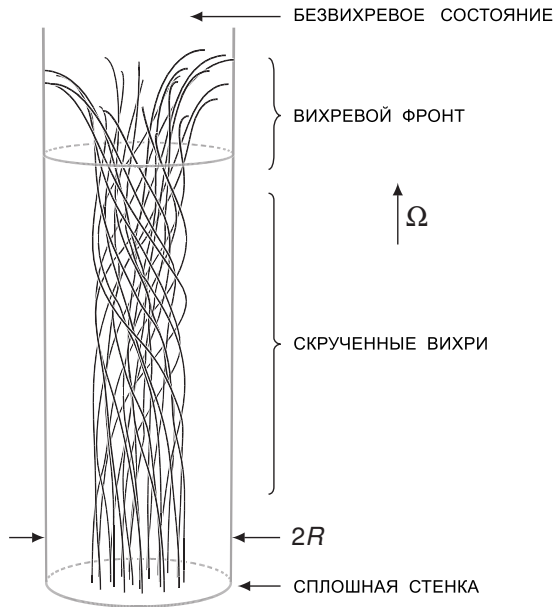


Рис. 2. Формирование скрученного состояния вихрей [7]. Сгусток вихревых линий медленно растет вверх по мере вращения цилиндра. Здесь Ω - угловая скорость, R - радиус вращающегося цилиндра. Рисунок помещен с любезного согласия Е. Тюнеберга.

Каждый элементарный вихрь дает ничтожный вклад. Но поскольку таких виртуальных волчков множество, они могут дать заметный макроскопический эффект. Совместная группа физиков из Финляндии, России и Японии провели модельный расчет с образованием скрученных вихревых пучков [7], которые формируются в жидком гелии $^3\text{He-B}$ при вращении цилиндра, заполненного им, см. Рис. 2. Обнаружено, что по мере вращения цилиндра, на нижней плоскости начинает формироваться вихревой пучок, который медленно растет вверх, пока не достигает верхней плоскости. Каждая вихревая нить в этом ансамбле представлена множеством элементарных вихрей, образующих целостное образование и вступающих в синергическое отношение с другими нитями. В результате, формируется скрученный вихревой пучок, который может оказывать макроскопическое воздействие на верхний диск, см. Рис. 3.

В подобной манере могут формироваться и скрученные вихревые пучки в физическом вакууме, где элементарными вихрями выступают виртуальные пары частиц и античастиц. Эти пары аннигилируют, затем рождаются вновь, быть может в ином месте (поскольку принцип неопределенности не гарантирует им рождаться там же, где произошла аннигиляция). Так как

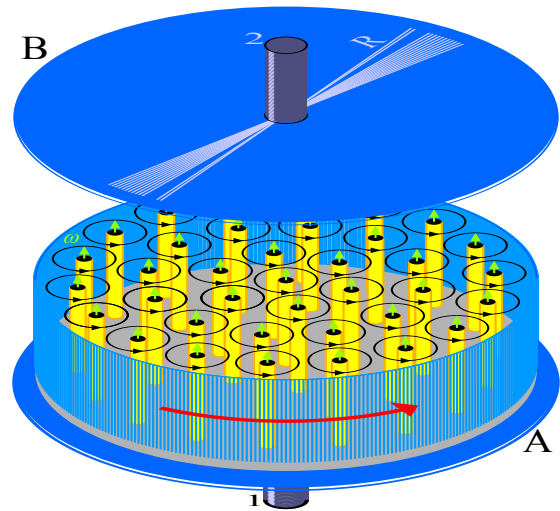


Рис. 3. Вращение сверхтекучей особой среды, какой является физический вакуум, приводит к формированию решетки квантованных вихрей [12], [3]. Ядра вихрей, окрашенные в желтый, параллельны оси вращения. Зеленые стрелки показывают завихренность ω . Малые стрелки на черных окружностях указывают направление орбитальной скорости $\vec{v}_R$ вокруг завихренностей. Вакуум поддерживается между неферромагнитными дисками A и B с радиусами R , насаженными на несвязанные оси 1 и 2. Диск A вращается и вызывает формирование вихревого пучка. Как только вихревой пучок достигает верхнего диска B, диск захватывается в единый вращательный ритм [2].

эти флуктуирующие пары являются бозонами, их рождение происходит в том же самом вихревом пучке - орбитальный момент и киральность вихревого пучка являются инвариантами задачи.

Скрученные вихревые пучки не являются однородными, но образуют решетку из квантованных вихрей с завихренностями, параллельными оси вращения [12]. На Рис. 3 показана такая решетка вихрей, изображенных желтыми столбиками. Завихренности, ω , изображены зелеными стрелками, ориентированными вверх.

Такой вихревой пучок, возникающий в сверхтекучей особой среде, какой является физический вакуум, растет от нижнего, вращающегося диска, A вверх. Как только пучок достигает верхнего, изначально неподвижного, диска B, он захватывает диск в единый вращательный ритм. Такой эксперимент был поставлен В. Самохваловым [2] (см. схему на Рис. 4) и продемонстрировано, что захват диска B имеет место в том и только том случае, если между дисками A и B поддерживается хороший технический вакуум (~ 0.02 Torr). В противном случае отсутствуют условия для формирования вихревого пучка.

Таким образом в дополнение к эффекту Казимира, обусловленному селекцией колебательных мод (скалярных волн), заключенных в ограниченном пространстве между двумя пластинами, существует еще один эффект, обусловленный воспроизводством скрученного вихревого пучка вращающимся диском. Вихревой пучок формируется из синергического ансамбля элементарных вихрей, представленных виртуальными парами

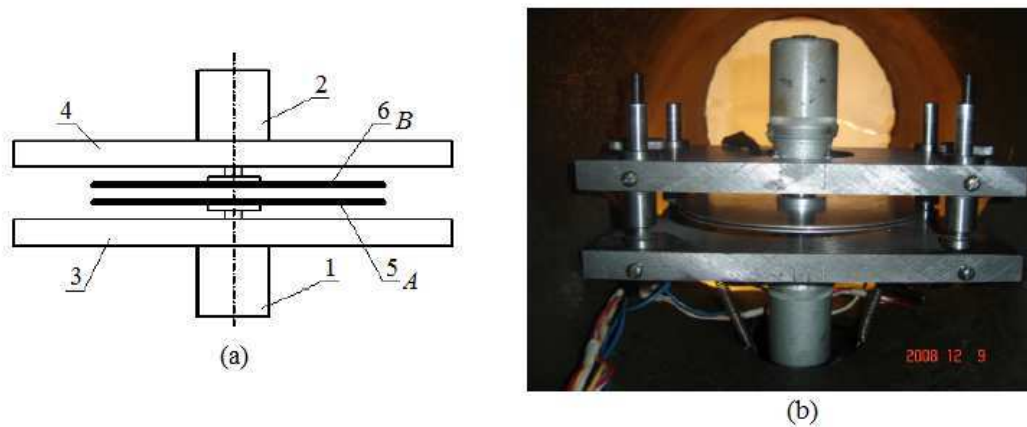


Рис. 4. Принципиальная схема (а) и общий вид устройства (б) для исследования массодинамического эффекта: 1 и 2 - оси с насаженными на них электромоторами; 3 и 4 - стальные платы с укрепленными на них электромагнитными тормозами; 5 и 6 (А и В, см. предыдущий рисунок) - неферромагнитные диски, жестко закрепленные на фланцах роторов электромоторов. Рисунок помещен с любезного согласия В. Самохвалова.

частиц и античастиц, которые флуктуируют на нижней Боровской орбите вокруг общего центра масс. Как только вихревой пучок достигает верхнего не вращающегося диска, он захватывается в единый процесс вращения. Теперь задача заключается в том, чтобы дать ясную математическую картину этого явления.

III. УРАВНЕНИЕ НАВЬЕ-СТОКСА СПОСОБНО ОПИСАТЬ ТЕЧЕНИЕ ОСОБОЙ СВЕРХТЕКУЧЕЙ СРЕДЫ

Второй закон Ньютона описывает ускоренное движение твердого тела под воздействием приложенной к нему внешней силы $\vec{F}$:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}. \quad (1)$$

Здесь m - масса тела, $\vec{v}$ - текущая скорость тела, а справа представлена сила $\vec{F}$.

Однако, если тело является деформируемым, то при описании движения такого тела, наряду с внешней силой, необходимо еще учитывать и внутренние силы, приводящие к его деформациям, по мере движения в пространстве. В первом приближении таких внутренних сил две. Одна обусловлена давлениями, возникающими внутри тела. А вторая обусловлена трением частей тела друг о друга по мере движения тела. Последняя сила является диссипативной, приводящей к рассеянию энергии тела в тепло, по мере движения.

По сути, мы имеем расширение второго закона Ньютона на движение деформируемых сред. Уравнение, описывающее такое движение, является уравнением Навье-Стокса:

$$\rho_m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{F}}{\Delta V} - \nabla P + \mu \nabla^2 \vec{v}. \quad (2)$$

Так как это уравнение описывает движение деформируемой среды, то вместо массы пишем плотность распределения массы M по объему ΔV , занимаемую этой средой, то есть $\rho_m = M/\Delta V$. Также следует учитывать, что приложенная внешняя сила распределена

по телу. Так что надо писать плотность внешней силы $\vec{F}/\Delta V$. Два других члена описывают действие внутренних сил. Член ∇P описывает градиент давления P , возникающий в каждой точке этой среды. А член $\mu \nabla^2 \vec{v}$, как видно, представляет диффузию потока. Он описывает диссипацию скорости, обусловленную вязкостью среды. Коэффициент μ называется динамической вязкостью.

Как можно видеть, уравнение Навье-Стокса представляет собой специфическую форму второго закона Ньютона, которое описывает движение классической сжимаемой, вязкой жидкости. Данное уравнение обладает богатым классом решений, начиная от простых ламинарных течений жидкости, и вплоть до таких сложных течений, какими являются турбулентные. Последние дают такие интересные решения, какими являются появление, эволюция и диссипация вихрей. Из-за наличия диссипативного члена $\mu \nabla^2 \vec{v}$, любые вихревые движения со временем затухают. Поэтому, в том виде, как это уравнение представлено, оно не может претендовать на описание каких-либо квантовых явлений.

Можно в принципе отказаться от диссипативного члена. Тогда рассеяние в тепло каких-либо форм движения будет отсутствовать – уравнение будет описывать идеальную сверхтекучую жидкость. Это уравнение называется уравнением Эйлера.

Казалось бы, данное уравнение в состоянии описать движение особой сверхтекучей среды, какой является физический вакуум. Тем не менее здесь возникают проблемы с описанием вихревых форм движения. В принципе, вихрь, как решение уравнения, может существовать бесконечно долго. Но вихрь имеет тот недостаток, что его завихренность ω сосредоточена в точке локализации вихря. Иными словами, для описания вихря мы вынуждены привлекать дельта-функцию, которая представляет завихренность ω , как таковую. Что это значит физически? Это означает, что вблизи локализа-

ции завихренности, орбитальная скорость стремится к бесконечности. Это ведет к расходимостям в последующих вычислениях, со всеми отсюда вытекающими последствиями, типа вынужденных перенормировок решений. С физической точки зрения, уравнение Эйлера имеет малую эффективность.

Допустим две модификации в уравнение Навье-Стокса [3]:

$$\rho_M \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{F}}{\Delta V} - \rho_M \nabla \left(\frac{P}{\rho_M} \right) + \mu(t) \nabla^2 \vec{v}. \quad (3)$$

Здесь видно, что модификациям подверглись члены, описывающие внутренние силы деформируемой среды. Первая сила, описываемая градиентом давления, приобретает вид $\rho_M \nabla(P/\rho_M) = \nabla P - P \nabla(\ln(\rho_M))$. Дополнительный член $P \nabla(\ln(\rho_M))$, как видно, отсутствует в оригинальном уравнении Навье-Стокса: в согласии с принципом бритвы Оккама, его наличие вводит излишнюю сущность. Но именно эта сущность позволяет вывести квантовый потенциал, без которого не получить уравнение Шредингера - главного уравнения нерелятивистской квантовой механики. Сейчас мы займемся выводом квантового потенциала. Что касается времени-зависимой динамической вязкости $\mu(t)$, этим вопросом займемся на следующем этапе.

А. Квантовый потенциал

Прежде всего определим массовую плотность, ρ_M , через плотность числа частиц, ρ , населяющих объем ΔV :

$$\rho_M = \frac{M}{\Delta V} = \frac{mN}{\Delta V} = m\rho. \quad (4)$$

Здесь общая масса M жидкости в объеме ΔV представляется произведением масс элементарных носителей m на количество этих носителей N в этом же объеме [13]. Также мы полагаем, что элементарные носители в этой среде совершают Броуновские блуждания [14]. В этой связи, необходимо иметь диффузионный коэффициент такого блуждания. Допустим, коэффициент имеет вид [15]

$$D = \frac{\hbar}{2m}, \quad (5)$$

где $\hbar$ является константой Планка, деленной на 2π . Следует заметить, что концепция Броуновского движения представляет эмпирическую верификацию принципа неопределенности [16]. А именно, при столкновении двух частиц, местоположение их становится локализованным с точностью до их размеров. Следовательно, по принципу неопределенности, они в результате столкновения приобретают неопределенные импульсы (иначе, неопределенные углы разлета после столкновения).

Примем к сведению, что энергия элементарного носителя есть $E = mc^2$, где $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ - скорость света в физическом вакууме, а ϵ_0 и μ_0 являются абсолютной диэлектрической и магнитной проницаемостями вакуума, соответственно. С другой стороны, эта же энергия

может быть выражена как $E = \hbar\omega/2$. Здесь ω представляет частоту волнового излучения, соответствующего элементарному носителю. Из выше выписанных формул гипотеза дуализма волны-частицы может быть выражена в явном виде как масса, определяемая через частоту излучения в физическом вакууме

$$m = \frac{\hbar}{2c^2} \omega = \frac{\hbar}{2} \epsilon_0 \mu_0 \omega. \quad (6)$$

Это соотношение показывает, что материя, при некоторых обстоятельствах, может вести себя как волна, демонстрируя интерференционные эффекты [16].

Теперь, подставляя выражение (6) в уравнение (5), получаем еще одно представление диффузионного коэффициента

$$D = \frac{c^2}{\omega} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0 \omega}. \quad (7)$$

Формула представляет коэффициент диффузии для радиации виртуальных частиц, обитающих на нижнем энергетическом уровне.

Постулируем: квантовый потенциал пропорционален давлению $P = P_1 + P_2$, которое возникает в жидкой среде, под действием сил, вызывающих напряжения в этой среде. Полагается, что давление P представимо суммой двух давлений P_1 и P_2 . Первый закон Фика гласит, что диффузионный поток $\vec{J}$ пропорционален отрицательной величине градиента массовой плотности, $\vec{J} = -D \nabla \rho_M$, где коэффициент пропорциональности, D , является тем самым коэффициентом диффузии, определенном выше. Так как член $D \nabla \vec{J}$ имеет размерность давления, определяем

$$P_1 = D \nabla \vec{J} = -\frac{\hbar^2}{4m^2} \nabla^2 \rho_M. \quad (8)$$

Замечаем далее, что кинетическая энергия диффузионного потока может быть определена как $(m/2)(\vec{J}/\rho_M)^2$. Отсюда следует, что может существовать еще одно давление, P_2 , определяемое как средняя передача импульса, отнесенная к единице поверхности в единицу времени:

$$P_2 = \frac{\rho_M}{2} \left(\frac{\vec{J}}{\rho_M} \right)^2 = \frac{\hbar^2}{8m^2} \frac{(\nabla \rho_M)^2}{\rho_M}. \quad (9)$$

Окончательно получаем, что сумма двух давлений, $P_1 + P_2$, деленная на $\rho = \rho_M/m$, см. (4), дает на выходе квантовый потенциал [17], [18]

$$Q = \frac{P_1 + P_2}{\rho} = \frac{\hbar^2}{8m} \left(\frac{\nabla \rho}{\rho} \right)^2 - \frac{\hbar^2}{4m} \frac{\nabla^2 \rho}{\rho}. \quad (10)$$

Теперь, чтобы прийти к уравнению Шредингера, надо дополнить уравнение Навье-Стокса уравнением непрерывности, а затем выполнить ряд преобразований с самим уравнением Навье-Стокса, чтобы вычленив из него равнение Гамильтона-Якоби, нагруженного квантовым потенциалом [3].

Мы не будем здесь выполнять эти преобразования. Заметим только, что решением уравнения Шредингера

является комплексно-значная функция, которую, в нашем контексте, имеет смысл представлять в полярной форме

$$\psi(\vec{r}, t) = \sqrt{\rho} \exp\{-iS/\hbar\}. \quad (11)$$

Здесь ρ представляет плотность вероятности нахождения частицы (элементарного носителя энергии) в окрестности точки $\vec{r}$, в момент времени t . А функция S , называемая функцией действия, характеризует мобильность этой частицы там же. Мобильность представляет собой импульс частицы $\vec{p} = \nabla S$, или может быть выражена через скорость частицы

$$\vec{v}_S = \frac{1}{m} \nabla S. \quad (12)$$

Здесь индекс S подчеркивает, что скорость является производной от скалярной функции S . Ротор, примененный к этой скорости, тождественно обращается в нуль.

Волновая функция $\psi(\vec{r}, t)$ описывает движение особой сверхтекучей жидкости - физического вакуума, представленного неисчислимым набором всевозможных виртуальных пар частиц и античастиц. Все они находятся на нижайшем энергетическом уровне, и только нулевые флуктуации вакуума заявляют об их существовании.

В. Вихревое движение

Замечательно, что уравнение Навье-Стокса содержит широкий набор решений, захватывающий простые ламинарные течения и вплоть до таких сложных решений, какими являются турбулентные. Это означает, что скорость $\vec{v}$ представляется суперпозицией, как минимум, двух составляющих скоростей [19] - крейсерской скоростью $\vec{v}_S$ и орбитальной скоростью $\vec{v}_R$. Здесь индексы S и R указывают на принадлежность скоростей, крейсерская скорость следует из градиента скалярного поля S и орбитальная скорость обусловлена движением по окружности. Они удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\begin{cases} (\nabla \cdot \vec{v}_S) \neq 0, & [\nabla \times \vec{v}_S] = 0, \\ (\nabla \cdot \vec{v}_R) = 0, & [\nabla \times \vec{v}_R] = \vec{\omega}. \end{cases} \quad (13)$$

Здесь $\vec{\omega}$ называется завихренностью.

Давайте применим оператор ротор к модифицированному уравнению Навье-Стокса (3). Но прежде представим полную производную скорости $\vec{v}$ по времени (производную по времени вдоль траектории) через частные производные (производные от приращений в выбранной точке $(\vec{r}, t)$):

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}. \quad (14)$$

Тогда, после применения оператора ротор к уравнению (3) получаем уравнение для завихренности $\vec{\omega}$:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{v} = \nu(t) \nabla^2 \vec{\omega}. \quad (15)$$

Здесь и далее мы не будем писать индекс R у орбитальной скорости $\vec{v}$, так как только с ней будем

иметь дело в дальнейшем. Это уравнение описывает состояние вихря в локальной системе координат, привязанной к центру вихря. Правый член описывает диссипацию энергии, запасенной в вихре. Коэффициент $\nu(t) = \mu(t)/\rho_m$ представляет кинетический коэффициент вязкости. Его размерность - [длина²/время]. Как было сказано ранее, данный коэффициент является флуктуирующей функцией времени.

Для простоты анализа данного уравнения совместим систему координат с центром вихря таким образом, чтобы ось вихря была бы направлена вдоль оси z , а сам вихрь лежал бы в плоскости (x, y) . Уравнение вихря, переписанное в такой системе координат, имеет вид

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu(t) \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} \right). \quad (16)$$

Здесь не пишется знак вектора над ω , поскольку завихренность точно ориентирована вдоль оси z . Общее решение этого уравнения имеет следующий вид

$$\omega(r, t) = \frac{\Gamma}{4\Sigma(\nu, t, \sigma)} \exp \left\{ -\frac{r^2}{4\Sigma(\nu, t, \sigma)} \right\}, \quad (17)$$

$$v(r, t) = \frac{1}{r} \int_0^r \omega(r', t) r' dr' = \frac{\Gamma}{2r} \left(1 - \exp \left\{ -\frac{r^2}{4\Sigma(\nu, t, \sigma)} \right\} \right). \quad (18)$$

Здесь Γ имеет размерность [длина²/время], а знаменатель $\Sigma(\nu, t, \sigma)$ имеет вид

$$\Sigma(\nu, t, \sigma) = \int_0^t \nu(\tau) d\tau + \sigma^2. \quad (19)$$

Параметр σ представляет произвольную постоянную такую, при которой знаменатель остается всегда положительным. Этот параметр обусловлен предположением существования стационарного Гауссова 'облака' [20], поддерживаемое полем давления.

Рассмотрим случай, когда коэффициент вязкости является положительной константой, $\nu = \text{const} > 0$. В этом случае имеет место необратимая диссипация энергии вихря. Решение (17)-(18) вырождается к виду

$$\omega(r, t) = \frac{\Gamma}{4(\nu t + \sigma^2)} \exp \left\{ -\frac{r^2}{4(\nu t + \sigma^2)} \right\}, \quad (20)$$

$$v(r, t) = \frac{\Gamma}{2r} \left(1 - \exp \left\{ -\frac{r^2}{4(\nu t + \sigma^2)} \right\} \right). \quad (21)$$

При $\sigma = 0$ в литературе это решение известно, как вихрь Лэбма-Озеена [21], которое описывает затухание вихря из-за вязкости. Как видно из (20)-(21), при $t \rightarrow \infty$ и завихренность $\omega(r, t)$ и угловая скорость $v(r, t)$ обращаются в нуль во всем пространстве.

Рассмотрим случай идеальной жидкости $\nu = \text{const} \rightarrow 0$. В этом случае, решения (20)-(21) обнажают стационарное Гауссово 'облако' [20]. Отличная от нуля постоянная σ имеет смысл среднего радиуса этого облака. Завихренность плавно спадает, а орбитальная скорость

возрастает от нуля до некоторого максимального значения по мере возрастания радиуса r от центра облака до σ . Затем она спадает до нуля при $r \rightarrow \infty$.

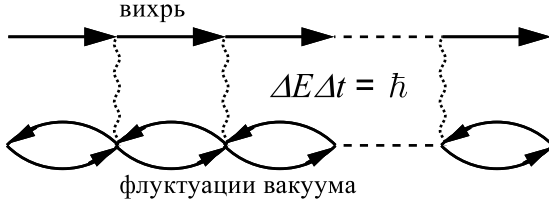


Рис. 5. Обмен энергией вихря с флуктуациями вакуума.

Возврат к формулам (17)-(18) показывают, что при флуктуациях вязкости $\nu(t)$ вокруг его нулевого значения, происходит обмен энергией вихря с нулевыми вакуумными флуктуациями, Рис. 5. Пусть, для наглядности, вязкость $\nu(t)$ имеет следующий вид

$$\nu(t) = \nu \cos(\Omega t) = \nu \frac{e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t}}{2}. \quad (22)$$

Тогда, вычисляя интеграл (19), находим, что в формулах для завихренности (17) и орбитальной скорости (18) функция $\Sigma(\nu, t, \sigma)$ будет иметь следующий вид

$$\Sigma(\nu, t, \sigma) = (\nu/\Omega)(\sin(\Omega t) + n) \quad (23)$$

Здесь $(\nu/\Omega)n = \sigma^2$ и $n > 1$. Эти решения при заданных параметрах $\Gamma = 1$, $\nu = 1$, $\Omega = 2\pi$, $n = 16$ показаны на Рис. 6. Завихренность $\omega(r, t)$ достигает максимума в центре вихря ($r = 0$), а затем убывает к нулю при $r \rightarrow \infty$. Тогда как орбитальная скорость обращается в нуль в центре вихря, растет вместе с ростом r , а после достижения некоторого максимального значения начинает монотонно спадать к нулю при $r \rightarrow \infty$. Обе функции, как видно, не убывают со временем, но сохраняют некоторый среднестатистический уровень. Видно, что и завихренность $\omega(r, t)$ и орбитальная скорость $v(r, t)$ испытывают колебания вокруг этого уровня. Эти колебания обусловлены обменом запасенной энергии вихря с вакуумными флуктуациями.

Качественный вид вихря в его поперечном сечении показан на Рис. 7. В центре вихря хорошо видно светлое пятно, представляющее ядро вихря. Обращаясь к макроскопическим образам, лучше всего привести пример с торнадо. В этом смысле, светлое пятно представляет глаз торнадо, где скорость ветра минимальна. А в самом центре имеет место легкий штиль. По мере удаления от центра торнадо, скорость ветра нарастает, пока не достигает сокрушительной силы на стенке глаза. Удаляясь от стенки глаза наружу, скорость ветра начинает падать. И вдали от торнадо, ветер заметно ослабевает.

Колебания плотности завихренности и орбитальной скорости представляет дыхание торнадо, которое наиболее явственно проявляется, пока торнадо формируется на океанских просторах. Известно, что оно является источником инфразвуковых колебаний, улавливаемых животными и человеком задолго до обрушения его на

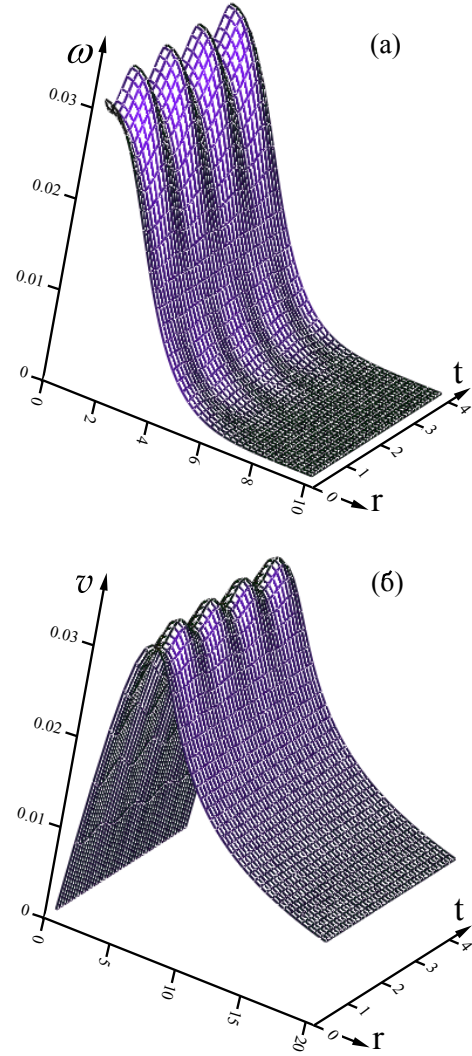


Рис. 6. Решения (17)-(18) с функцией $\Sigma(\nu, t, \sigma)$ данной в формуле (23); $\nu = 1$, $\Omega = 2\pi$, $n = 16$ и $\Gamma = 1$: (а) завихренность $\omega(r, t)$, (б) орбитальная скорость $v(r, t)$.

береговую линию. Инфразвук оказывает дискомфортное состояние на животных и они стараются покинуть область с его повышенным уровнем. У человека он может являться к тому же провокатором фантомных видений и слуховых галлюцинаций.

Возвращаясь к проблеме передачи воздействия от одного диска (вращающегося) к другому (неподвижному) через самоорганизующийся вихревой пучок в вакууме, поставленной в начале статьи, мы пришли к уравнению Навье-Стокса, со слегка модифицированными внутренними силами (градиента давления и вязкости). Данное уравнение описывает движение особой сверхтекучей среды - движение физического вакуума. Уравнение дает решение вихря, который вовлекает в себя множество пар частиц и античастиц, флуктуирующих во вращательном танце вокруг центра масс. Каждая такая кружащая пара имеет ничтожный момент импульса (количество вращательного движения), но мириады пар, вовлеченные в единый вращательный танец

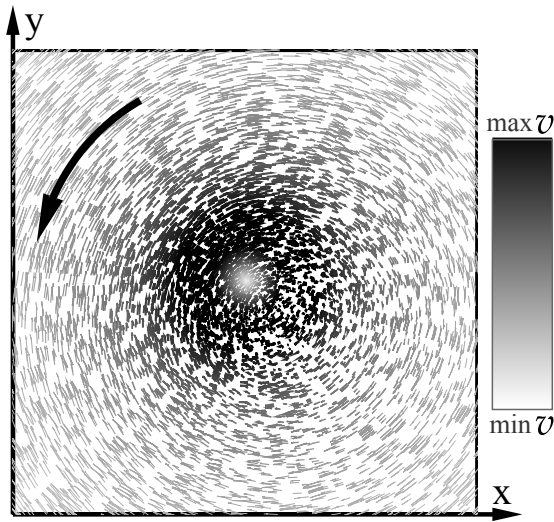


Рис. 7. Поперечное сечение вихря в плоскости (x, y) . Величины скорости v представлены серым цветом, начиная от светло серого ($\min v$) до темно серого ($\max v$). Плотность пикселей представляет интенсивность завихренности.

(сформированный вихрь), в состоянии передать кинетический момент неподвижному диску и захватить его в общее вращение. Удивительно, что именно этот процесс захвата лежит в основе стабилизации орбитальной скорости вращения спиральных галактик [22].

IV. ВРАЩЕНИЕ СПИРАЛЬНЫХ ГАЛАКТИК.

Казалось бы, спиральная галактика внешне напоминает торнадо в своем поперечном сечении. А поэтому скорость вращения спиральной галактики вокруг оси, должна была бы подчиняться такой же закономерности, как и орбитальная скорость торнадо. А именно, в центре галактики скорость минимальна, затем она растет по мере удаления от ядра галактики, а после достижения некоторой максимальной скорости, начинает медленно спадать при удалении к периферии галактики.

Реальные измерения орбитальных скоростей вращения галактик показывают, что это далеко не так. После достижения максимальной скорости, при последующем удалении от центра галактики, скорость сохраняется на постоянном уровне, или даже продолжает слегка увеличиваться [4].

В попытке разрешить этот факт, ученые ввели понятие темной материи [23], [24], [25]. Полагается, что именно ее присутствие в теле галактики способствует стабилизации вращения ее рукавов. Представьте себе, что все звезды и межзвездный газ 'намертво вклеены' в некую жесткую субстанцию, которая никак не взаимодействует с барионной материей, за исключением гравитации. Такая 'жесткая болванка' при вращении вокруг оси, удерживала бы все звезды в тех местах, где они оказались 'намертво вклеенными'. Поскольку темная материя никак себя не проявляет, кроме гравитационного взаимодействия, то ее присутствие невозможно обнаружить приборами, основанными на известных

взаимодействиях - электромагнитных, сильных, слабых. Остаются только ее косвенные подтверждения за счет гравитационного захвата.

Однако, в научной литературе представлены мнения [6], [26], [10], отрицающие темную материю, как представляющую ложный инструментальный в решении деликатной проблемы.

Возникает вопрос, а не является ли отмеченный выше эффект стационарного вращения рукавов галактик подобным тому же, который наблюдает и описывает в свои статьи Самохвалов? Иными словами, нет никакой темной материи, но стационарное вращение обусловлено стабилизацией за счет самоорганизации вихревых пучков в вакууме, вовлекающих в единый вихревой танец звезды и межзвездный газ рукавов галактик. В статье [22] автор предлагает механизм стабилизации орбитального вращения спиральных галактик, основанный на выше высказанной идее.

Предположим, что существует широкий спектр коэффициентов вязкости. Ради простоты представления, будем полагать спектр дискретным, с локализацией каждой компоненты в частотном диапазоне, подчиненной закону $1/f$ (фликкер-спектр):

$$\nu_n(t) = \frac{c^2}{\Omega_n} \cos(\Omega_n t). \quad (24)$$

Здесь c - скорость света. Обратим внимание, что коэффициент c^2/Ω_n эквивалентен диффузионному коэффициенту (7). Так что на разных частотных модах существуют собственные коэффициенты вязкости. При этом, коэффициент вязкости, ν_n , сходится к бесконечности, при Ω_n стремящейся к нулю. Такой спектр возбудимости мод вакуума дает наибольший вклад в завихренность на частотах, близких к нулю:

$$\Sigma_n(t) = 4 \left(\frac{c^2}{\Omega_n^2} \sin(\Omega_n t) + \sigma_n^2 \right). \quad (25)$$

Для каждой колебательной моды, как видно, существует собственное вихревое Гауссово облако с собственным средним радиусом

$$\sigma_n = \frac{4c}{\Omega_n}. \quad (26)$$

Отсюда видно, в частности, что в случае Ω_n , стремящейся к нулю, облако покрывает всю вселенную, а вязкость облака стремится к бесконечной величине.

Далее последующие выкладки основываются на вычислениях, подобных вычислению канонической функции распределения, представляющей статистическую сумму по всем возможным состояниям системы. В нашем случае, статистическая сумма дается суперпозицией решений уравнения (16) по всем орбитальным модам. Как результат, получаем суммарную завихренность

$$\omega(r, t) = \frac{\Gamma}{N} \sum_{n=1}^N \frac{1}{\Sigma_n(t)} \exp \left\{ -\frac{r^2}{\Sigma_n(t)} \right\} \quad (27)$$

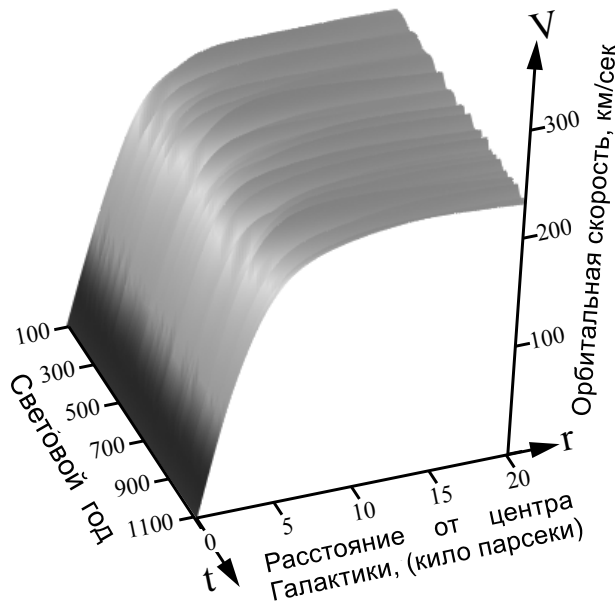


Рис. 8. Орбитальная скорость V как функция радиуса r от центра галактики (в килопарсек), эволюционирующая во времени t на протяжении порядка в 1000 лет.

и орбитальную скорость

$$V(r, t) = \frac{\Gamma}{2rN} \sum_{n=1}^N \left(1 - \exp \left\{ - \frac{r^2}{\Sigma_n(t)} \right\} \right). \quad (28)$$

Кривые (27) и (28) далее вычисляются при $\Gamma = 4 \cdot 10^{27}$ м²/сек, $\Omega_n = 10^{-11} n^{-1}$ 1/сек, и $N = 25$.

Рис. 8 показывает эволюцию орбитальной скорости для типичной спиральной галактики для t , изменяющимся в пределах 1000 световых лет (время принято измерять в единицах tc , здесь c - скорость света). Видно, что зависимость V от r почти не меняется на всем временном промежутке. Еще, что бросается в глаза - это наличие малых флуктуаций скорости вокруг некоторого среднего значения орбитальной скорости. Галактика дышит. Это дыхание обусловлено обменом энергии вращения галактики с флуктуациями виртуальных пар частиц и античастиц на очень низких частотах - на длинах волн, соизмеримых с размерами галактик. Скорее всего эти пары представляют гравитационные диполи. Драган Хайдукович в этой связи пишет [26]: "темной материи не существует, но это иллюзия, созданная поляризацией квантового вакуума в гравитационном поле барионной материи. Следовательно, квантовые флуктуации вакуума, впервые обоснованные в квантовой теории поля, но пренебрегаемые в астрофизике и космологии, имеют прямое отношение к проблеме темной материи".

Наличие Гауссовых вихревых облаков со средним радиусом $\sigma_n \sim \Omega_n^{-1}$ обеспечивает устойчивость галактик. Эти облака представляют собой галактические гало, где имеет место сфероидаальная агрегация шаровых скоплений отдельных звезд, пыли и газа, окружающих галактику. Как следует из формулы (26), радиус вихревого облака стремится к бесконечности по мере

того, как Ω_n стремится к нулю. По этой причине гало может простираться на значительные расстояния, превышающие размеры галактики.

V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Самоорганизация гигантских количеств волчков, представленных виртуальными парами частиц и античастиц, вовлечение их в единый вращающийся танец приводит к заметному макроскопическому эффекту. Этот эффект наблюдается в эксперименте Самохвалова [2] захватом вращающимся в вакууме диском изначально неподвижного диска. В космических масштабах подобный эффект имеет место в стабилизации орбитального вращения рукавов спиральных галактик. В результате чего, все звезды вращаются вокруг центрального ядра галактики с почти одинаковой скоростью, как бы далеко они не находились от центра галактики.

Этот эффект, так же как и эффект Казимира, является проявлением удивительных свойств физического вакуума - вакуума, который ранее назывался эфиром, отвечающим за передачу взаимодействия на расстояния (как например притяжение разноименных электрических зарядов, масс, или влияние магнитного поля на удаленное тело).

Любопытно, что отрицание эфира, как вездесущей особой субстанции, на начальной стадии построения общей теории относительности (ОТО), повлекло ряд ложных гипотез. Одними из таких являются концепции темной материи и темной энергии. Обе концепции основываются на допущении абсолютной правоты уравнений ОТО и на поспешных выводах, сделанных из ранних астрофизических наблюдений. Первая должна была каким-то образом объяснить стабилизацию вращений рукавов спиральных галактик. А вторая должна была объяснить неувязки, обнаруженные в законе Хаббла, называемом также законом всеобщего разбега галактик. В результате на свет появились допущения о существовании неизвестных доселе субстанций, названных темной материей и темной энергией.

Выше были упомянуты только две спорные гипотезы. Общепризнано, однако, что современная наука переживает онтологический кризис [10] - кризис, обусловленный наличием ложных посылок, которые принимаются последующим поколением ученых как истины. Современный кризис в науке в чем-то напоминает столкновение геоцентрической и гелиоцентрической точек зрения - вращается ли Солнце вокруг Земли, или Земля вращается вокруг Солнца. История свидетельствует, что борьба этих точек зрения носила весьма драматический характер. Вполне возможно, что и разрешение современного кризиса в науке может проходить по драматическому сценарию, когда на кон будет поставлена проблема инфляционной космологии, основанная на безупречном признании Большого Взрыва.

А. Ответ рецензентам

Прежде всего выражаю признательность рецензентам за конструктивную критику основополагающих пунктов в статье.

1) *Ответ на рецензию Г. И. Шипова:* С большим интересом ознакомился с данной рецензией и нахожу ее исключительно конструктивной.

Начну с замечания: "Казалось бы, что для аналитического описания надо было бы сделать квантово-динамические расчеты для новой ситуации. Однако автор пошел другим путем." Замечание затрагивает суть проблемы. В принципе, следовало бы начинать с построения Гамильтониана, учитывающего всевозможные взаимодействия материи с физическим вакуумом. А затем шаг за шагом распутывать клубок этих взаимодействий. Нет причин указывать на то, что эта работа сталкивается с решением проблемы расходимостей, возникающих при вычислении этих взаимодействий. Другой путь - это объявить, что вязкость среды, сверхтекучей среды, является функцией, флуктуирующей вокруг нуля. Иными словами, в определенный момент времени барионная материя отдает вакууму часть кинетической энергии, а в другой момент принимает ее обратно. Вязкость характеризует необратимую диссипацию энергии. Здесь же вводится понятие отрицательной вязкости. В некотором смысле отрицательная вязкость аналогична понятию отрицательного сопротивления, которое сыграло в электронике продуктивную роль. В данном же случае введение отрицательной вязкости обеспечивает то, что вихрь, индуцированный в среде, может жить сколь угодно долго.

Вполне разделяю замечания рецензента, что для более строгого рассмотрения проблемы, следовало бы использовать процедуру Маделунга, примененную к уравнению Дирака. Это явилось бы естественным продолжением исследований в релятивистском секторе. И будет принято во внимание в будущем. На данном же этапе заметим, что скорости вращения рукавов галактик составляют порядка 100 км/сек, что на три порядка меньше скорости света, и в первом приближении вполне допустимо нерелятивистское приближение, каким является уравнение Навье-Стокса.

Что касается замечания о взаимодействии центра галактики с ее периферийными частями, в данном контексте эта задача не рассматривается. Но, по большому счету, согласен, что эта задача требует более деликатного подхода, как например рассматриваемая в работах "Quantum Raychaudhuri equation" и "Cosmology from quantum potential" [27], [28].

2) *Ответ на рецензию М. Осипова:* Замечания касаются сути конкретного взаимодействия вращающихся объектов в вакууме. Согласен, что для детального описания такого взаимодействия следует выписать Гамильтониан этого взаимодействия и далее исследовать поэтапно каналы взаимодействия с вакуумом. Проблемы, возникающие в этом исследовании, отмечены в ответе к первому рецензенту.

Новым здесь является то, что обращается внимание на общность механизмов взаимодействия дисков в эксперименте Самохвалова и стабилизации орбитальных скоростей рукавов спиральных галактик. Взаимодействие происходит за счет обмена энергии вращательного движения барионной материи с вакуумным Бозе-Эйнштейна конденсатом, представляемым само-организованным ансамблем пар "частица-античастица". В свете этой общности эксперименты Самохвалова приобретают особую значимость.

Модификация уравнений Навье-Стокса затрагивает два момента: (а) при определенных преобразованиях это уравнение, в паре с уравнением непрерывности, должно приводить к уравнению Шредингера как рекомендовавшего себя эталонного уравнения нерелятивистской квантовой механики; (б) уравнение должно иметь решениями долгоживущие вихри с ядром вихря, поперечный радиус которого отличен от нуля. Первый пункт решается модификацией градиента давления так и таким образом, чтобы на выходе получался бы квантовый потенциал - необходимое условие для появления уравнения Шредингера. Второй пункт решается объявлением вязкости, как параметра среды, флуктуирующим вокруг нуля. Этот момент раскрыт в ответе к первому рецензенту.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. Осипов. Взаимодействие вращающихся тел и общие принципы симметрии. *ЖФНН*, 9(3):144–145, 2015.
- [2] В. Н. Самохвалов. Неэлектромагнитное силовое взаимодействие при вращении масс в вакууме. *ЖФНН*, 1(1):6–19, 2013. (In Russian).
- [3] V. I. Sbitnev. Physical vacuum is a special superfluid medium. In Prof. Pahlavani, M. R., editor, *Selected Topics in Applications of Quantum Mechanics*, chapter 12, pages 345–373. InTech, Rijeka, 2015a. doi: 10.5772/59040.
- [4] W. J. G. de Blok, S. S. McGaugh, and V. C. Rubin. High-resolution rotation curves of low surface brightness galaxies. II. Mass models. *The Astronomical Journal*, 122:2396–2427, 2001. doi: 10.1086/323450.
- [5] В. М. Мостепаненко and Н. Н. Трунов. Эффект Казимира и его приложения. *УФН*, 156:385–426, 1988. doi: <http://dx.doi.org/10.3367/UfNr.0156.198811a.0385>.
- [6] Л. М. Топтунова. Астрофизика и ее понятия. Вселенная состоит из барионной материи, 5 2012. URL <http://www.astrogalaxy.ru/880.html>.
- [7] V. B. Eltsov, A. P. Finne, R. Hänninen, J. Kopu, M. Krusius, M. Tsubota, and E. V. Thuneberg. Twisted vortex states. *Phys. Rev. Lett.*, 96:215302, 2006. doi: 10.1103/PhysRevLett.96.215302.
- [8] G. E. Volovik. *The Universe in a Helium Droplet*. Oxford University Press, Oxford, 2003.
- [9] R. J. Donnelly. *Quantized Vortices in Helium II*. Cambridge University Press, Cambridge, NY, 1991.
- [10] П. В. Полуян. *Гибель Темной Материи: философские принципы в физическом познании*. Красноярский Гос. Университет, Красноярск, 2015.
- [11] В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, and Л. П. Питаевский. *Квантовая электродинамика*. Физматлит, М., 2002.
- [12] O. V. Lounasmaa and E. Thuneberg. Vortices in rotating superfluid ^3He . *PNAS*, 96(14):7760–7767, 1999. doi: 10.1073/pnas.96.14.7760.
- [13] R. Jackiw, V. P. Nair, S.-Y. Pi, and A. P. Polychronakos. Perfect fluid theory and its extensions. *J. Phys. A*, 37:R327–R432, 2004. doi: 10.1088/0305-4470/37/42/R01.
- [14] E. Nelson. *Dynamical theories of Brownian motion*. Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1967.

- [15] E. Nelson. Derivation of the Schrödinger equation from Newtonian mechanics. *Phys. Rev.*, 150:1079–1085, 1966. doi: 10.1103/PhysRev.150.1079.
- [16] V. I. Sbitnev. Generalized path integral technique: nanoparticles incident on a slit grating, matter wave interference. In Prof. Bracken, P., editor, *Advances in Quantum Mechanics*, chapter 9, pages 183–211. InTech, Rijeka, 2013. doi: 10.5772/53471.
- [17] A. Benseny, G. Albareda, A. S. Sanz, J. Mompart, and X. Oriols. Applied Bohmian mechanics. *Eur. Phys. J. D*, 68:286–328, 2014. doi: 10.1140/epjd/e2014-50222-4.
- [18] I. Licata and D. Fiscaletti. *Quantum potential: Physics, Geometry, and Algebra*. Springer, Cham, Heidelberg, N. Y., Dordrecht, London, 2014.
- [19] P. Kundu and I. Cohen. *Fluid Mechanics*. Academic Press, San Diego, California 92101-4495, 2002.
- [20] N. K.-R. Kevlahan and M. Farge. Vorticity filaments in two-dimensional turbulence: creation, stability and effect. *J. Fluid Mech.*, 346(9):49–76, 1997. doi: 10.1017/S0022112097006113.
- [21] Wu Jie-Zhi, Ma Hui-Yang, and Zhou Ming-De. *Vorticity and Vortex Dynamics*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2006.
- [22] V. I. Sbitnev. Hydrodynamics of the physical vacuum: dark matter is an illusion. *Mod. Phys. Lett.*, A30(35):1550184 (16 pages), 2015b. doi: 10.1142/S0217732315501849.
- [23] A. Bosma. The dark matter problem. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 72(1-2):69–90, 1998. doi: 1023/A:1008366614769.
- [24] J. Einasto. Dark matter, (19 Oct 2010. URL <http://arxiv.org/pdf/0901.0632.pdf>.
- [25] V. C. Rubin. A brief history of dark matter. In Livio M., editor, *The Dark Universe: Matter, Energy and Gravity*, Symposium Series: 15, pages 1–13. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [26] D. S. Hajdukovic. Is dark matter an illusion created by the gravitational polarization of the quantum vacuum? *Astrophys. Space Sci.*, 334:215–218, 2011. doi: 10.1007/s10509-011-0744-4.
- [27] S Das. Quantum Raychaudhuri equation. *Phys. Rev.*, D89:084068, 2014. doi: 10.1103/PhysRevD.89.084068.
- [28] A. F. Ali and S. Das. Cosmology from quantum potential. *Physics Letters B*, 741:276–279, 4 February 2015. doi: 10.1016/j.physletb.2014.12.057.