

Поля и силы инерции как предмет научного исследования

Г.И. Шипов

Аннотация—Рассматриваются трудности классической механики, связанные с проблемой сил и полей инерции во вращающейся системе отсчета (триаде Эйлера). Для преодоления этих трудностей движение триады Эйлера представлено как движение по геодезическим шестимерного неголономного пространства абсолютного параллелизма $A_3(3)$. Показано, что любое механическое движение триады сводится к ее вращению как в пространственных, так и в пространственно-временных углах (гипотеза Декарта), при этом поля и силы инерции оказываются связанными с кручением пространства $A_3(3)$. В построенной на базе геометрии $A_3(3)$ неголономной механике Декарта рассматривается модель 4D гироскопа. Найдены решения, которые предсказывают ускоренное движение центра масс свободного 4D гироскопа. Построена и исследована конкретная модель, демонстрирующая пространственно-временную нутацию, предсказанную аналитически.

I. ВВЕДЕНИЕ

Современная классическая механика в ее научном понимании начала развиваться с работы И. Ньютона [1]. В этой работе были введены основные понятия и дана словесная формулировка первому, второму и третьему закону механики материальной точки. Для решения некоторых задач механики И. Ньютон использовал геометрические методы, поскольку представление движения материальной точки под действием внешней силы в виде дифференциального уравнения в то время еще не существовало. Только спустя 50 лет после выхода работы И. Ньютона [1] Л. Эйлер [2] придал трем законам Ньютона известный нам аналитический вид

$$I) \frac{d}{dt} \vec{P} = 0, \quad II) \frac{d}{dt} \vec{P} = \vec{F}, \quad III) \vec{F}_1 = -\vec{F}_2,$$

$$\vec{P} = m\vec{v} = m \frac{d\vec{x}}{dt} \quad (1)$$

Эти уравнения записаны в инерциальной системе отсчета и все движения в механике Ньютона происходят в трехмерном евклидовом пространстве. Основные характеристики движения, такие как ускорение $d^2\vec{x}/dt^2$ и скорость $d\vec{x}/dt$ в общем случае зависят от трансляционных координат x, y, z и времени t .

warpdive09@gmail.com.

Почти сразу после выхода ньютоновских “Начал” механика Ньютона подверглась критике современниками Ньютона по многим ее основным понятиям, таким, например, как определение силы $\vec{F}$, стоящей в правой части уравнений движения (1). Особенно остро стоял вопрос о природе и источнике силы инерции, действующей во вращающемся “ведре Ньютона”. Наблюдатель, находясь в инерциальной (лабораторной) системе отсчета, видит искривление поверхности воды при вращении ведра, наполненного водой, при этом невозможно было указать “со стороны какого тела эта сила была приложена”. Чтобы выйти из трудного положения, И. Ньютону пришлось ввести в механику абстрактное понятие “абсолютного пространства”, с которым он связал инерциальную систему отсчета и “объяснял” появление сил инерции как результат ускоренного движения материальной точки относительно “абсолютного пространства”.

Эти проблемы привели к тому, что в 1869 г. философский факультет Геттингенского университета предложил конкурс и премию за лучшее критическое сочинение, посвященное основам механики Ньютона. В результате премии были удостоены сочинения Э. Дюринга [3] и Э. Маха [4], при этом Э. Мах предложил заменить “абсолютное пространство” Ньютона принципом Маха, согласно которому силы инерции действуют на тела при их ускоренном движении относительно “удаленных масс во Вселенной”! Кроме того, Э. Мах подверг критике выделенное положение инерциальной системы отсчета, полагая, что все системы отсчета должны быть “равноправны”. Идеи Маха оказали сильное влияние на А. Эйнштейна. В результате появилась общая теория относительности, которую А. Эйнштейн рассматривал “как единственный способ избежать такой нереальной вещи, как инерциальная система отсчета” [5]. Отказываясь от понятия инерциальной системы отсчета, А. Эйнштейн рассматривает ускоренные системы отсчета как единственно реальные и выдвигает принцип общей относительности, утверждающих равноправие всех ускоренных систем отсчета, при этом “инерциальная” система отсчета представляет собой предельный случай ускоренной системы отсчета, движущейся с малым ускорением. Такой класс ускоренных систем отсчета мы будем называть (квази)инерциальными.

В настоящее время в классической механике известно четыре силы инерции, при этом уравнения движения материальной точки в ускоренной системе отсчета имеют вид

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} - m\vec{W} - 2m[\vec{\omega} \vec{v}] - m[\vec{\omega} [\vec{\omega} \vec{r}]] - m[\dot{\vec{\omega}} \vec{r}], \quad (2)$$

где U - потенциальная энергия внешнего поля, $\vec{W}$ - поле инерции в поступательно ускоренной системе отсчета, $\vec{\omega}$ - угловая скорость вращения системы отсчета. Если сравнивать уравнения (2) с уравнениями механики Ньютона (1), то в уравнениях (2) действуют силы инерции, которые не подчиняются III-му закону Ньютона, при этом силы инерции $-m\vec{W}$ и $-m[\vec{\omega} [\vec{\omega} \vec{r}]]$ оказываются потенциальными, обладающими потенциальной энергией

$$U_{(iner)} = m \left\{ (\vec{W} \vec{r}) - [\vec{\omega} \vec{r}]^2 / 2 \right\}, \quad (3)$$

в то время как силы $-2m[\vec{\omega} \vec{v}]$ и $-m[\dot{\vec{\omega}} \vec{r}]$ не являются потенциальными. Из уравнений (2) видно, что три силы инерции возникают при вращении материи в пространственных углах φ, ψ, θ (например, углах Эйлера), которые являются неголономными вращательными координатами, образующими трехмерную группу вращений $O(3)$. Важно отметить, что потенциальная энергия $m(\vec{W} \vec{r})$ положительна, а энергия центробежной силы $-m[\vec{\omega} \vec{r}]^2 / 2$ отрицательна. С другой стороны, поле инерции $\vec{W}$ можно рассматривать как вращение в пространственно-временных плоскостях. Например, нерелятивистское ускорение при движении вдоль оси x записывается как

$$W_x = \frac{dV_x}{dt} = c \frac{d\theta_x}{dt}, \quad (4)$$

где θ_x - псевдоевклидов угол в плоскости $x - ct$.

Этот аналитический факт указывает на четырехмерную природу сил и полей инерции. Впервые в науке на полевую природу указал А. Эйнштейн, когда сформулировал сильный принцип эквивалентности, который гласит: "Поле инерции, действующее на массивное тело при равномерном ускоренном движении, локально эквивалентно однородному гравитационному полю". Этот принцип является отображением экспериментально наблюдаемого состояния невесомости тел, находящихся в свободно падающем лифте Эйнштейна вблизи поверхности Земли. В этом случае эквивалентность поля инерции гравитационному полю вызывает в каждой малой области тела силу инерции, которая компенсирует гравитационную силу. В результате тело в свободно падающем лифте находится в состоянии невесомости.

Хотя силы инерции были осознаны исследователями более 300 лет назад, споры о их природе и значении в физических теориях идут до сих пор. Если сделать выборку примерно из 100 учебников по теоретической механике, соотношение мнений по поводу того, реальны силы инерции или нет, представлено на рис.1.

Как мы видим, число ученых, рассматривающих силы инерции как нереальные, составляет большинство. Такую ситуацию в науке можно рассматривать

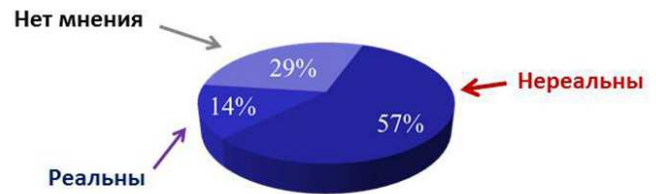


Рис. 1. Соотношение мнений о силах инерции.

как лингвистическо-смысловой нонсенс, поскольку силы, если они наблюдаются в экспериментах, не могут быть названы "нереальными". Казалось бы, о чем тут спорить? Тем не менее, дискуссии о "реальности" сил инерции проходили как в Западной Европе, так и в России в 1890-х годах. Широко известны дискуссии в Киеве [6] и, особенно, в 1936 г. в Москве [7]. Последняя дискуссия проходила в 1985 г. в институте Проблем механики АН СССР на Всесоюзной конференции "Основы классической механики и их роль в преподавании механики" (Москва, 1-8 октября 1985). Академик РАН Л.И. Седов утверждал, что силы инерции реальны, поскольку они могут компенсировать гравитационные силы (например, в свободно падающем лифте Эйнштейна), реальность которых признают все физики [8]. Противоположную точку зрения отстаивал академик РАН, директор института Проблем механики, А.Ю. Ишлинский. Он рассматривает силы инерции как "фиктивные" силы, которые используются в механике "для удобства при математических расчетах механических систем" [9]. Основные аргументы сторонников "фиктивности" сил инерции следующие: 1) силы инерции можно вводить и убирать из уравнений движения преобразованиями координат; 2) невозможно указать реальное тело, которое является источником сил инерции. Противоположное мнение маститых ученых по одному и тому же вопросу указывает на глубокий кризис в понимании основ классической механики. С другой стороны, механики, которые работают с реальными механическими системами, из условия безопасности их работы вынуждены рассматривать силы инерции как реальные. Вот что пишет известный механик, профессор Л.Б. Левенсон [7]:

"Стало особенно заметно данное разногласие по существенному вопросу о силах инерции: на первых двух курсах студентов учили в теоретической механике, что силы инерции вовсе не существуют, что они лишь воображаемые и вводятся в расчет для удобства, отнюдь не будучи реальными, что силы инерции условный геометрический вектор, математическая фикция и т.д. А через год в курсе тепловых двигателей их заставляли складывать действительные давления пара на поршень с несуществующей силой инерции движущихся частей, чтобы получить истинную результирующую силу. Всякое пренебрежение, всякий недоучет этой "вовсе не существующей силы" неизбежно несет за собой поломки, крушения и тому подобные реальные последствия".

Вернемся к “ведру Ньютона” и рассмотрим действие сил на воду при его вращении. Используя гидродинамические уравнения Эйлера для описания стационарного вращения воды в прозрачном сосуде (рис.2), имеем

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{g} - \rho [\vec{\omega}[\vec{\omega} \vec{r}]] - \nabla p. \quad (5)$$

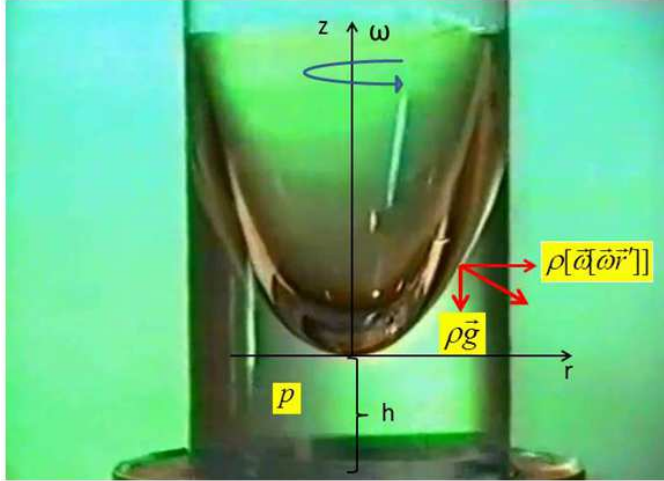


Рис. 2. Искривление поверхности воды при ее вращении.

Из уравнений (5) видно, что на любой малый элемент вращающейся жидкости с плотностью ρ действует сила тяжести $\rho \vec{g}$, центробежная сила $-\rho [\vec{\omega}[\vec{\omega} \vec{r}]]$ и сила $-\nabla p$, порожденная давлением p . Интегрируя уравнения (5), находим закон сохранения энергии

$$p = \rho \frac{\omega^2 r^2}{2} - \rho g z = const \quad (6)$$

в котором потенциальная энергия (якобы “фиктивной”) силы инерции $-\rho \omega^2 r^2/2$ складывается с гравитационной потенциальной энергией $-\rho g z$. В координатах z, r кривая, лежащая на поверхности воды и проходящая через центр вращения, является параболой (см. рис.2)

$$z = h + \frac{\omega^2 r^2}{2g}, \quad (7)$$

а сама поверхность представляет собой параболоид вращения. Этого простого примера достаточно, чтобы увидеть, что силы инерции – это реальные силы, действие которых изменяет геометрию поверхности ускоренно движущейся (в данном случае вращающейся) жидкости. Понятно, что внутри жидкости на любой бесконечно малый объем действует сила инерции, поэтому для протяженного тела мы всегда имеем поле сил инерции, при этом поле сил инерции порождено полем инерции. Учитывая этот факт, мы приходим к выводу, что проблема полей и сил инерции выходит за рамки классической механики Ньютона, в основании которой понятие поля отсутствует как таковое.

На изменение внутренней геометрии у вращающихся объектов впервые обратил внимание А. Эйнштейн [5]. Он заметил, что, эффект релятивистского сокращения

длины края диска при скоростях, близких к скорости света, приведет к релятивистскому сокращению длины окружности l на краю вращающегося диска. В результате изменится геометрия диска, поскольку в этом случае $l/2R < \pi$. Такому сокращению, но в меньшей степени, подвергаются все окружности на диске, поэтому диск приобретет форму чаши (рис. 3).

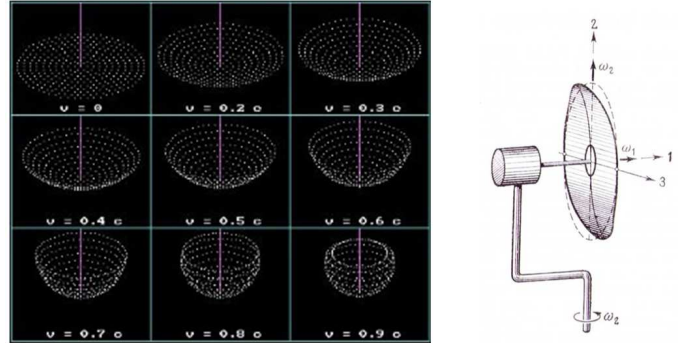


Рис. 3. Искривление поверхности вращающегося диска.

На рис. 3 слева представлены изменения формы диска в зависимости от линейной скорости его края. Мы видим, что с увеличением скорости диск приобретает форму чаши. Однако эти теоретические рассуждения А. Эйнштейна отличаются от того, что мы наблюдаем в эксперименте, который показывает, что внутренняя геометрия диска меняется уже при нерелятивистских скоростях. На рис. 3 справа диск из упругого металла вращается одновременно вокруг осей 1 и 2. При некоторой достаточно большой угловой скорости вращения поверхность диска изгибается. Дело в том, что реальный диск не является абсолютно твердым телом, у которого расстояния между двумя точками не меняются. Кроме того, вращательное движение вообще невозможно рассматривать в рамках механики Ньютона или специального принципа относительности Эйнштейна, поскольку вращение представляет собой ускоренное движение, когда на бесконечно малые элементы вращающегося диска действует поле сил инерции.

II. МЕХАНИКА УСКОРЕННО ДВИЖУЩЕЙСЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ КАК ОБОБЩЕНИЕ МЕХАНИКИ НЬЮТОНА

Единственный способ прекратить дискуссию по вопросу, реальны или фиктивны силы и поля инерции, состоит в том, чтобы *раз и навсегда отказаться от понятия инерциальной системы отсчета при построении физической теории*. Действительно, инерциальные системы отсчета отсутствуют в реальности, поскольку все тела находятся хотя бы в пренебрежимо малом взаимодействии. Вопрос особо остро возник в квантовой механике, когда теоретически предсказано и экспериментально доказано, что любая реальная частица всегда находится под влиянием флуктуаций Физического Вакуума при отсутствии других частиц

(лэмбовский сдвиг, эффект Казимира), правда, на это мало кто обращает внимания.

Хотя И. Ньютону и Л. Эйлеру были известны (не все) силы инерции [1,2], эти силы отличаются от обычных “контактных” ньютоновских сил. Все они порождены вращением материи. Получить нерелятивистские уравнения движения материальной точки с массой m можно из рис.4, на котором изображена (квази)инерциальная система отсчета S с единичными ортогональными векторами $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$

$$\vec{e}_1 \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \vec{e}_3 = 1, \quad \vec{e}_1 \vec{e}_2 = \vec{e}_1 \vec{e}_3 = \vec{e}_2 \vec{e}_3 = 0, \quad (8)$$

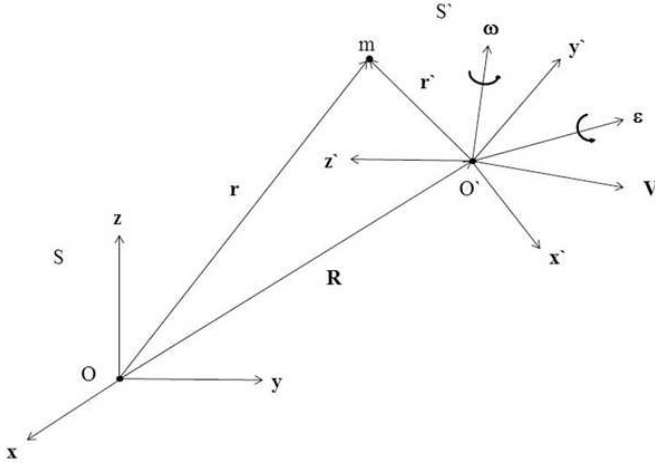


Рис. 4. Движение массы m в ускоренной системе отсчета.

и ускоренно движущаяся относительно S система отсчета S' . Приращение вектора $\vec{r}$ ускоренно движущейся частицы в системе S дается выражением [10]

$$d\vec{r} = d\vec{R} + d\vec{r}' = d\vec{R} + [\vec{d}\vec{\chi} \vec{r}'] + d'\vec{r}', \quad (9)$$

Здесь $d\vec{R}$ - приращение радиус-вектора $\vec{R}$, характеризующего положение начала O' ускоренной системы отсчета S' , $d'\vec{r}'$ - приращение радиус-вектора $\vec{r}'$, спроектированное на оси ускоренной системы отсчета S' , $\vec{d}\vec{\chi}$ - бесконечно малый поворот [10]

$$\vec{d}\vec{\chi} = \vec{e}_3 d\varphi_1 + \vec{e}_2 d\varphi_2 + \vec{e}_1 d\varphi_3, \quad (10)$$

представленный на рис.5, описывает бесконечно малый поворот вокруг мгновенной оси. Пространственную ориентацию векторов ускоренной системы отсчета определяют неголономные вращательные координаты $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ - углы Эйлера.

Дифференцируя (9) по времени, получаем выражение для скорости ускоренно движущейся частицы

$$\begin{aligned} \vec{v}(x, y, z, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, t) &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} + \left[\frac{d\vec{\chi}}{dt} \vec{r}' \right] + \frac{d'\vec{r}'}{dt} = \\ &= \vec{V} + [\vec{\omega} \vec{r}'] + \vec{v}'. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь $\vec{V}$ - трансляционная скорость начала O' ускоренной системы отсчета, $\vec{\omega} = d\vec{\chi}/dt$ - угловая скорость вращения системы отсчета S' , линейная скорость $\vec{v}^\varphi(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = [\vec{\omega} \vec{r}']$, порожденная изменением

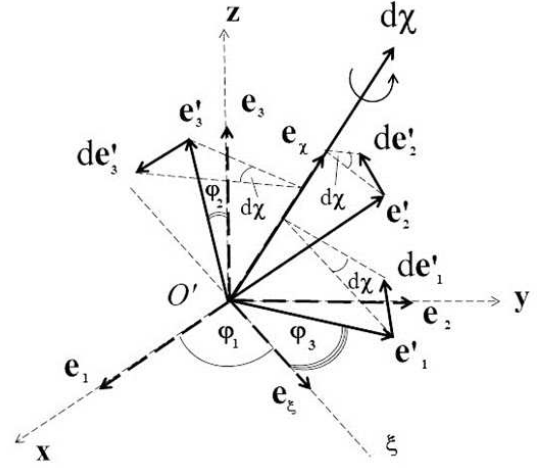


Рис. 5. Вращение триады $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ в углах Эйлера вокруг трех осей x, y, z можно описать вращением вокруг мгновенной оси, определяемой вектором $\vec{e}_\xi = [\vec{e}_3 \vec{e}_3]$ (теорема Эйлера).

ориентации системы S' относительно S и $\vec{v}'$ - скорость относительно системы S' . Когда выполняется условие $\vec{R} = 0$, т.е. начала систем S и S' совпадают, тогда из (11) следует

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d'\vec{r}'}{dt} + [\vec{\omega} \vec{r}'] = \vec{v}' + [\vec{\omega} \vec{r}']. \quad (12)$$

При переходе от не штрихованных дифференциалов d к штрихованным дифференциалам d' , подобное соотношение существует для любого вектора $\vec{A}$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d'\vec{A}}{dt} + [\vec{\omega} \vec{A}], \quad (13)$$

поэтому имеем для векторов $\vec{v}'$ и $\vec{\omega}$

$$\frac{d\vec{v}'}{dt} = [\vec{\omega} \vec{v}'] + \frac{d'\vec{v}'}{dt}, \quad \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d'\vec{\omega}}{dt}. \quad (14)$$

Дифференцируя (12) еще раз по времени и используя вспомогательные формулы (14), получим

$$\vec{a}(x, y, z, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{W} + [\vec{\omega} [\vec{\omega} \vec{r}']] + [\vec{\varepsilon} \vec{r}'] + 2[\vec{\omega} \vec{v}'] + \vec{a}', \quad (15)$$

где $d\vec{R}/dt = \vec{V}$ - трансляционная скорость начала O' системы S' , $d\vec{V}/dt = \vec{W}$ - трансляционное ускорение начала O' системы S' , $d'\vec{v}'/dt = \vec{a}'$ - ускорение частицы μ относительно системы S' , $d\vec{\omega}/dt = \vec{\varepsilon}$ - угловое ускорение системы S' .

Если на частицу действует внешнее силовое поле с потенциальной энергией U , то, умножая (15) на m , получим следующие уравнения движения массы m в ускоренной системе отсчета

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} - m\vec{W} - m[\vec{\omega} [\vec{\omega} \vec{r}']] - 2m[\vec{\omega} \vec{v}'] - m\left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \vec{r}'\right] - m\vec{a}' \quad (16)$$

Если в (16) не учитывать силу инерции $-m\vec{a}'$, то уравнения (16) совпадают с уравнениями (2), используемыми в учебниках по механике. Напомним, что

сила $-m\vec{W}$ тоже порождена вращением, но не в углах Эйлера, а в псевдоевклидовых углах $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ (см. ф-лу (4)). Очевидно, что уравнения (2) *обобщают уравнения механики Ньютона* (1), поскольку: 1) в уравнениях (2) основные характеристики движения зависят от шести параметров – трех трансляционных координат x, y, z , трех углов Эйлера $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, которые, в свою очередь, являются функциями времени t ; 2) для уравнений (2) не выполняется I-ый закон механики Ньютона, поскольку, при условии отсутствия внешних сил ($-\partial U/\partial \vec{r} = 0$) частица движется ускоренно под действием сил инерции; 3) для уравнений (2) не выполняется III-ий закон механики Ньютона, поскольку (в рамках механики Ньютона) неизвестно со стороны каких “тел” приложены силы инерции; 4) в (квази)инерциальной системе отсчета уравнения (2) переходят в уравнения (1), при условии, что

$$\left| -m\vec{W} - m[\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{r}]] - 2m[\vec{\omega}\vec{v}] - m\left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}\vec{r}\right] \right| \cong 0. \quad (17)$$

III. МЕХАНИКА ОРИЕНТИРУЕМОЙ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Соотношение (17) показывает, что механика Ньютона описывает явления, в которых силы инерции пренебрежимо малы так, что ими можно пренебречь. Это условие также означает, что углами Эйлера $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ и псевдоевклидовыми углами $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ можно пренебречь. Поэтому пространства событий механики Ньютона образовано множеством трансляционных координат x, y, z и наделено метрикой трехмерной геометрии Евклида [2]. Такому пространству соответствуют инерциальные системы отсчета, которые движутся прямолинейно и равномерно, без вращения. Поскольку инерциальных систем отсчета в природе не существует, то необходимо ответить на вопрос – какова геометрическая структура пространства событий ускоренных систем отсчета, динамику которых невозможно описать без углов Эйлера $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ и псевдоевклидовых углов $\theta_1, \theta_2, \theta_3$? Общий ответ на этот вопрос можно найти в книге автора [11], а мы здесь рассмотрим трехмерный нерелятивистский случай.

Материальная точка в механике Ньютона представляется как идеализация реального тела конечных размеров, объем которого устремляется к нулю. Для описания движения такого объекта достаточно ввести трансляционные координаты x, y, z . Мы введем понятие ориентируемой материальной точки, которая представляет собой идеализацию твердого тела, с которым связана триада единичных векторов (8) [12]. Учитывая, что в этом случае $\vec{r}' = 0$ (см. рис. 4), получим из уравнений (2)

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} - m\vec{W} - 2m[\vec{\omega}\vec{v}]. \quad (18)$$

Отсюда следует, что в отсутствии внешних сил, когда $-\partial U/\partial \vec{r} = 0$, трехмерная ориентируемая точка движется под действием сил инерции в соответствии с

уравнениями

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -m\vec{W} - 2m[\vec{\omega}\vec{v}]. \quad (19)$$

А. Вращательная метрика пространства событий ориентируемой материальной точки

Заметим, что для полного описания динамики трехмерной ориентируемой точки нам необходимо задать шестимерное многообразие. Это многообразие состоит из трех трансляционных координат x, y, z и трех углов Эйлера $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Мы будем рассматривать такое многообразие как векторное расслоение, база которого образована трансляционными координатами x, y, z , при этом в каждой точке (x, y, z) задана тройка ортогональных векторов $\vec{e}_A$, где индекс $A = 1, 2, 3$ – нумерует вектора триады Эйлера. Как показал Л. Эйлер, на многообразии координат базы x, y, z задана евклидова метрика [2]

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (20)$$

Обычно в учебниках механики для углов Эйлера приняты обозначения $\varphi_1 = \varphi, \varphi_2 = \theta, \varphi_3 = \psi$, поэтому (10) можно переписать как

$$\vec{d\chi} = d\chi \vec{e}_\chi = \vec{e}_3 d\varphi + \vec{e}_2 d\theta + \vec{e}_1 d\psi. \quad (21)$$

Запишем бесконечно малый поворот триады Эйлера как $\vec{e}_A$

$$d\vec{e}_A = [\vec{d\chi} \vec{e}_A], \quad A = 1, 2, 3. \quad (22)$$

Пусть теперь триада движется по кривой траектории рис. 6 под действием только сил инерции и найдем ее уравнения движения. Для этого надо разделить левую и правую части равенства (22) на дифференциал длины дуги траектории $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$. В результате получаем уравнения движения 3D ориентируемой материальной точки под действием только сил инерции

$$\frac{d\vec{e}_A}{ds} = \left[\frac{\vec{d\chi}}{ds} \vec{e}_A \right] = [\vec{\Omega} \vec{e}_A], \quad (23)$$

где 3D – угловая скорость вращения $\vec{\Omega} = \vec{d\chi}/ds = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ триады вокруг оси, совпадающей с вектором $\vec{e}_3$.

Возведем соотношение (21) в квадрат $(\vec{d\chi})^2 = d\tau^2$, тогда получим вращательную метрику, заданную на множестве неголономных вращательных координат $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Чтобы найти общее аналитическое выражение для вращательной метрики, представим триаду Эйлера $\vec{e}_A, A = 1, 2, 3$ в виде e_α^A , где $\alpha, \beta, \gamma \dots = 1, 2, 3$ – векторные индексы триады и $A, B, C \dots = 1, 2, 3$ – индексы, нумерующие векторы триады (или локальные индексы). Такая запись позволяет представить основные соотношения механики ориентируемой материальной точки в тензорном виде. Условия ортогональности (8) мы теперь запишем как

$$e_\alpha^A e_B^\alpha = \delta_B^A, \quad e_\alpha^A e_A^\beta = \delta_\alpha^\beta, \quad (24)$$

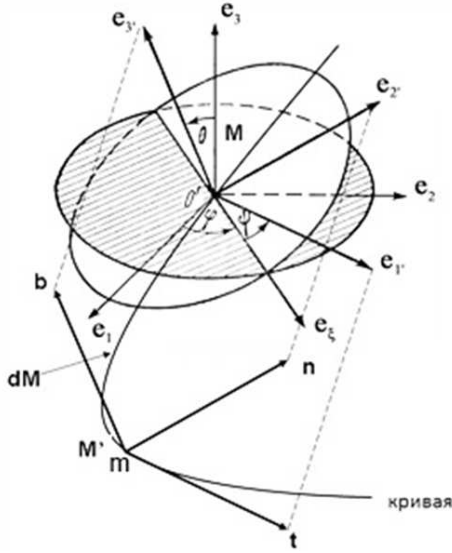


Рис. 6. Движение 3D ориентируемой материальной точки только под действием сил инерции.

где δ_B^A , δ_α^β - символы Кронекера. В тензорной записи соотношения (22) и (23) принимают вид

$$de_\alpha^A = d\chi_\alpha^\beta e_\beta^A, \quad (25)$$

$$\frac{de_\alpha^A}{ds} = \frac{d\chi_\alpha^\beta}{ds} e_\beta^A. \quad (26)$$

Умножая справа (25) и (26) на e_A^β , и, используя условия (24), получим

$$d\chi_\alpha^\beta = e_A^\beta de_\alpha^A, \quad (27)$$

$$\frac{d\chi_\alpha^\beta}{ds} = e_A^\beta \frac{de_\alpha^A}{ds} = \Omega_\alpha^\beta. \quad (28)$$

Дифференцируя (22), находим

$$e_\alpha^A de_\beta^A + e_\beta^A de_\alpha^A = d\chi_{\alpha\beta}^A + d\chi_{\beta\alpha}^A = 0, \quad (29)$$

откуда, с учетом (27), следует

$$d\chi_{\alpha\beta} = -d\chi_{\beta\alpha}. \quad (30)$$

С помощью триады e_A^β можно переходить от индексов $\alpha, \beta, \gamma, \dots = 1, 2, 3$ к индексам $A, B, C, \dots = 1, 2, 3$ и наоборот: $d\chi_{\alpha\beta} = d\chi_{\alpha\beta} e_\alpha^A e_\beta^B$. Кроме того, триада e_A^β позволяет поднимать и опускать индексы $\eta_\beta^A = \eta_{\alpha\beta} e^\alpha$ и т.д. Поэтому (28) можно записать как

$$\begin{aligned} d\chi_{\alpha\beta}/ds &= -d\chi_{\beta\alpha}/ds = \Omega_{\alpha\beta} = \\ &= -\Omega_{\beta\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (31)$$

где $\Omega_{\alpha\beta}$ - 3D тензор угловой скорости вращения триады. Преобразуем (27) и (28), записав их как

$$d\chi_\alpha^\beta = e_A^\beta de_\alpha^A = e_A^\beta e_{\alpha,\gamma}^A dx^\gamma = T_{\alpha\gamma}^\beta dx^\gamma, \quad (32)$$

$$\frac{de_\alpha^A}{ds} = T_{\alpha\gamma}^\beta \frac{dx^\gamma}{ds} e_\beta^A = \Omega_\alpha^\beta e_\beta^A, \quad (33)$$

где введены обозначения

$$T_{\alpha\gamma}^\beta = e_A^\beta e_{\alpha,\gamma}^A = -e_\beta^A e_{A,\gamma}^\alpha, \quad \gamma = \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \quad (34)$$

$$\Omega_\alpha^\beta = T_{\alpha\gamma}^\beta \frac{dx^\gamma}{ds}. \quad (35)$$

Поскольку соотношение (32) представляет собой дифференциалы вращательных координат, то для вращательной метрики мы получаем

$$d\tau^2 = d\chi_\beta^\alpha d\chi_\alpha^\beta = e_A^\alpha de_\beta^A e_\beta^A de_\alpha^A = T_{\beta\gamma}^\alpha T_{\alpha\sigma}^\beta dx^\gamma dx^\sigma = \Omega_\beta^\alpha \Omega_\alpha^\beta ds^2. \quad (36)$$

Объект (34) был введен впервые в математике итальянским математиком Г. Риччи [13] и получил название коэффициентов вращения Риччи. Согласно (34), именно эти величины определяют вращательную метрику в механике ориентируемой точки, поэтому в физических приложениях мы будем в дальнейшем называть объект (34) *торсионным полем*. В соответствии с формулами (31) и (35), *торсионное поле определяет вращение 3D ориентируемой материальной точки*. Угловые координаты φ, ψ, θ являются элементами пространства событий, порождающими торсионные поля. В физических теориях, в которых отсутствует инерциальная система отсчета, надо учитывать две метрики - трансляционную (20) и вращательную (36), при этом элементарным объектом нерелятивистской механики оказывается ориентируемая материальная точка. Формулы (31) и (35) дают аналитическое обоснование гипотезе Э. Картана [14], согласно которой вращение материи порождает кручение пространства.

В. Геометрия пространства событий 3D ориентируемой материальной точки

Естественно поставить вопрос, как устроено пространство событий, элементами которого являются 3D ориентируемые точки? Для поиска ответа на этот вопрос представим трансляционную метрику (20) в произвольных криволинейных координатах

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = \eta_{AB} e_\alpha^A e_\beta^B dx^\alpha dx^\beta,$$

$$\eta_{AB} = \eta^{AB} = \text{diag}(1, 1, 1). \quad (37)$$

Тогда бесконечно малый поворот триады (32) запишется в виде

$$d\chi_\alpha^\beta = e_A^\beta De_\alpha^A = e_A^\beta e_{\alpha,\gamma}^A dx^\gamma = \Delta_{\alpha\gamma}^\beta dx^\gamma \quad (38)$$

где

$$\Delta_{\alpha\gamma}^\beta = \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta + T_{\alpha\gamma}^\beta = e_A^\beta e_{\alpha,\gamma}^A \quad (39)$$

- связность пространства, удовлетворяющая условию

$$S_{\beta\gamma\eta}^\alpha = 2 \Delta_{\beta[\eta,\gamma]}^\alpha + 2 \Delta_{\rho[\gamma}^\alpha \Delta_{|\beta|\eta]}^\rho = 0. \quad (40)$$

В дифференциальной геометрии пространство, тензор кривизны $S_{\beta\gamma\eta}^\alpha$ которого обращается в нуль, называется пространством *абсолютного параллелизма* (см. математическую часть II работы [11]). В отличие от

пространства $A(3)$, которое обычно рассматривается на точечном многообразии трансляционных координат x, y, z , мы имеем дело с расслоенным пространством абсолютного параллелизма $A_3(3)$. В таком пространстве неголономные угловые координаты $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ – углы Эйлера – играют роль дополнительных трех координат в исходном шестимерном многообразии. Связность (39) представима в виде суммы символов Кристоффеля

$$\Gamma_{\alpha\gamma}^{\beta} = \frac{1}{2}g^{\beta\delta}(g_{\alpha\delta,\gamma} + g_{\gamma\delta,\alpha} - g_{\alpha\gamma,\delta}) \quad (41)$$

и коэффициентов вращения Риччи [11]

$$T_{\alpha\gamma}^{\beta} = -\Omega_{\alpha\gamma}^{\dots\beta} + g^{\alpha\delta}(g_{\alpha\mu}\Omega_{\delta\gamma}^{\dots\mu} + g_{s\mu}\Omega_{\delta\alpha}^{\dots\mu}) \quad (42)$$

где

$$\Omega_{\alpha\gamma}^{\dots\beta} = -\Delta_{[\alpha\gamma]}^{\beta} = -\frac{1}{2}e_A^{\beta}(e_{\alpha,\gamma}^A - e_{\gamma,\alpha}^A) \quad (43)$$

- кручение геометрии абсолютного параллелизма (или объект неголономности) [11]. Этот объект исчезает, если угловые координаты не являются динамическими переменными, связанными со структурой пространства. Действительно, при условии

$$\Omega_{\alpha\gamma}^{\dots\beta} = -\frac{1}{2}e_A^{\beta}(e_{\alpha,\gamma}^A - e_{\gamma,\alpha}^A) = 0 \quad (44)$$

связь (32) между дифференциалами $d\chi_{\alpha}^{\beta}$ угловых координат φ, θ, ψ и дифференциалами dx^{γ} пространственных координат x, y, z становятся голономными, при этом вращательная метрика (36) обращается в нуль. В этом случае мы можем переходить от (декартовых) координат x, y, z к угловым (сферическим) координатам φ, θ, ψ с помощью голономных преобразований. В результате мы получаем сферическую, цилиндрическую и т.д. системы координат, которые удобно использовать при решении многих практических задач в пространстве Евклида. Понятно, что *голономные угловые координаты φ, θ в сферической системе координат φ, θ, r не имеют никакого отношения к вращательному движению материи.*

Механика, в которой объект неголономности (43) отличен от нуля мы будем называть *неголономной механикой*, в силу того, что связь между дифференциалами трансляционных координат dx^{γ} и дифференциалами вращательных координат $d\chi_{\alpha}^{\beta}$ неголономна.

Триада Эйлера e_{α}^A по координатному индексу α преобразуется в группе $T(3)$ как вектор

$$e_{\alpha'}^A = \frac{\partial x_{\alpha'}}{\partial x_{\alpha}} e_{\alpha}^A, \quad \left\| \frac{\partial x_{\alpha'}}{\partial x_{\alpha}} \right\| \in T(3), \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (45)$$

в то время как по локальному (внутреннему) индексу A триада преобразуется в группе вращений $O(3)$

$$e_{\alpha}^{A'} = \Lambda_A^{A'} e_{\alpha}^A, \quad \Lambda_A^{A'} \in O(3), \quad A = 1, 2, 3. \quad (46)$$

Поэтому голономные преобразования из группы трансляций $T(3)$ в группу вращений $O(3)$ в общем случае *недопустимы*. Исключение составляет случай, когда вращение происходит по одной угловой координате θ . С

помощью триады e_{α}^A можно переходить от координатных индексов $\alpha, \beta, \gamma \dots$ к локальным $A, B, C \dots$ индексам. Например, торсионное поле (42), антисимметричное по индексам α и β , можно представить в виде

$$T_{B\gamma}^A = e_{\alpha}^A T_{\alpha\gamma}^{\beta} e_B^{\beta}. \quad (48)$$

Используя это свойство, можно записать уравнения движения (33) как

$$\frac{de_{\alpha}^A}{ds} = T_{B\gamma}^A \frac{dx^{\gamma}}{ds} e_{\alpha}^B = \Omega_B^A e_{\alpha}^B. \quad (49)$$

Представим эти уравнения в виде

$$\frac{D^* e_{\alpha}^A}{ds} = \frac{de_{\alpha}^A}{ds} - \Omega_B^A e_{\alpha}^B = 0. \quad (50)$$

где D^* – ковариантная производная относительно связности $T_{B\gamma}^A$ [11]. Соотношение (50) представляет собой ковариантную запись формулы (13). Наглядно структура пространства $A_3(3)$ механики ориентируемой точки представлена на рис.7. На этом рисунке изображено базовое пространство трансляционных координат x, y, z , на котором задана трансляционная метрика $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta} = \eta_{AB} e_{\alpha}^A e_{\beta}^B dx^{\alpha} dx^{\beta}$ и действует локальная группа трансляций $T(3)$. В каждой точке базового пространства задано пространство угловых координат

$$\begin{aligned} T(3) &\longrightarrow ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta} = \eta_{AB} e_{\alpha}^A e_{\beta}^B dx^{\alpha} dx^{\beta}, \\ O(3) &\longrightarrow d\tau^2 = d\chi_{\alpha}^{\beta} d\chi_{\beta}^{\alpha} = T_{\beta\gamma}^{\alpha} T_{\alpha\sigma}^{\beta} dx^{\gamma} dx^{\sigma} = \Omega_{\beta}^{\alpha} \Omega_{\alpha}^{\beta} ds^2 \end{aligned}$$

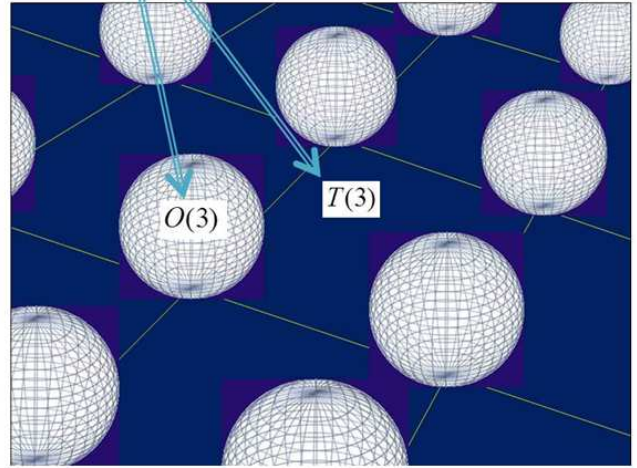


Рис. 7. Структура расслоенного пространства абсолютного параллелизма $A_3(3)$.

φ, θ, ψ (слой), изображенное в виде сферы, на котором задана вращательная метрика $d\tau^2 = d\chi_{\beta}^{\alpha} d\chi_{\alpha}^{\beta} = T_{\beta\gamma}^{\alpha} T_{\alpha\sigma}^{\beta} dx^{\gamma} dx^{\sigma}$ и действует локальная группа вращений $O(3)$. Подобное пространство существует в теории калибровочных полей. Например, в уравнения (49) входит торсионное поле $T_{B\gamma}^A$, у которого локальные индексы A и B – калибровочные индексы, а индекс γ – координатный индекс. Калибровочной группой в нашем случае оказывается группа вращений $O(3)$, при этом калибровочное поле $T_{B\gamma}^A$ принимает ясный физический смысл: в соответствии с формулой (35) оно

определяет угловую скорость вращения ориентируемой материальной точки.

Таким образом, пространство событий 3D ориентируемых материальных точек наделено структурой расслоенной геометрии абсолютного параллелизма $A_3(3)$. Оно обладает кручением (43), образующим торсионное поле (42). Механика ускоренно движущихся систем отсчета является неголономной. В такой механике всякое движение есть вращение (тезис Декарта), которое определяется через калибровочное поле $T_{B\gamma}^A$, интерпретирующееся физически как поле инерции.

С. Поля и силы инерции в уравнениях движения 3D ориентируемой материальной точки

Выберем вектор $\vec{e}_{(1)} = \vec{t} = d\vec{x}/ds$ касательным к кривой, по которой движется ориентируемая материальная точка, и распишем уравнения (49) покомпонентно с учетом антисимметрии $T_{B\gamma}^A$ по локальным индексам A и B . В результате получим

$$\frac{de_{\alpha}^{(1)}}{ds} = T_{(2)\gamma}^{(1)} \frac{dx^{\gamma}}{ds} e_{\alpha}^{(2)} = \Omega_{(2)}^{(1)} e_{\alpha}^{(2)}, \quad (51)$$

$$\frac{de_{\alpha}^{(2)}}{ds} = T_{(1)\gamma}^{(2)} \frac{dx^{\gamma}}{ds} e_{\alpha}^{(1)} + T_{(3)\gamma}^{(2)} \frac{dx^{\gamma}}{ds} e_{\alpha}^{(3)} = \Omega_{(1)}^{(2)} e_{\alpha}^{(1)} + \Omega_{(3)}^{(2)} e_{\alpha}^{(3)}, \quad (52)$$

$$\frac{de_{\alpha}^{(3)}}{ds} = T_{(2)\gamma}^{(3)} \frac{dx^{\gamma}}{ds} e_{\alpha}^{(2)} = \Omega_{(2)}^{(3)} e_{\alpha}^{(2)}. \quad (53)$$

Обозначим компоненты угловой скорости вращения Ω_B^A как

$$\kappa(s) = \Omega_{(2)}^{(1)} = T_{(2)\gamma}^{(1)} \frac{dx^{\gamma}}{ds}, \quad \chi(s) = \Omega_{(3)}^{(2)} = T_{(3)\gamma}^{(2)} \frac{dx^{\gamma}}{ds}, \quad (54)$$

а остальные вектора триады $\vec{e}_2, \vec{e}_3$ обозначим как вектор нормали $\vec{e}_2 = \vec{n}$ и бинормали $\vec{e}_3 = \vec{b}$. Тогда уравнения (51)-(53) принимают вид известных в математике уравнений Френе [15]

$$\frac{dt_{\alpha}}{ds} = \kappa(s)n_{\alpha}, \quad (55)$$

$$\frac{dn_{\alpha}}{ds} = -\kappa(s)t_{\alpha} + \chi(s)b_{\alpha}, \quad (56)$$

$$\frac{db_{\alpha}}{ds} = -\chi(s)n_{\alpha}, \quad \alpha, \beta, \gamma \dots = 1, 2, 3. \quad (57)$$

Здесь $\kappa(s)$ - кривизна траектории (первая угловая скорость), $\chi(s)$ - кручение траектории (вторая угловая скорость), однозначно определяющие произвольную кривую с точностью до положения в пространстве, ds - параметр длины дуги, квадрат которой образует трансляционную метрику $ds^2 = (t^{\alpha} dx_{\alpha})^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ группе $T(3)$.

Шесть независимых (в силу условий ортогональности (8)) уравнений (55)-(57) относительно шести независимых переменных $x, y, z, \varphi, \theta, \psi$ распадаются на трансляционные уравнения движения в базе

$$\frac{d^2 x_{\alpha}}{ds^2} = \kappa(s)n_{\alpha}, \quad (58)$$

$$\frac{d^3 x_{\alpha}}{ds^3} = \frac{d\kappa(s)}{ds} n_{\alpha} - \kappa^2(s)t_{\alpha} + \kappa(s)\chi(s)b_{\alpha}, \quad (59)$$

которые, после умножения на массу m , представляют собой уравнения движения механик 3D ориентируемой точки. Кроме того, из уравнений (55-57) следуют "вращательные" уравнения в слое вида

$$\frac{d\varphi}{ds} = \chi(s) \frac{\sin \psi}{\sin \theta}, \quad (60)$$

$$\frac{d\psi}{ds} = \kappa(s) - \chi(s) \sin \psi \operatorname{ctg} \theta, \quad (61)$$

$$\frac{d\theta}{ds} = \chi(s) \cos \psi, \quad (62)$$

отсутствующие в механике Ньютона. Переходя в уравнении (58) от параметра s к параметру времени t с помощью соотношений

$$v_{\alpha} = \frac{dx_{\alpha}}{dt} = \frac{dx_{\alpha}}{ds} \frac{ds}{dt} = t_{\alpha} \frac{ds}{dt}, \quad |\vec{v}| = \frac{ds}{dt} = v,$$

$$w_{\alpha} = \frac{d^2 x_{\alpha}}{dt^2} = \frac{d^2 x_{\alpha}}{ds^2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + t_{\alpha} \frac{d^2 s}{dt^2},$$

Имеем после умножения на массу m

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m t \frac{dv}{dt} + m \vec{n} \kappa v^2. \quad (63)$$

Поскольку в рассматриваемом случае $\vec{r}' = 0$, $\vec{r} = \vec{R}$, $|\vec{r}| = |\vec{R}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, при этом кривизна траектории определяется как $\kappa = 1/r$, где r - радиус кривизны траектории. Поскольку скорость $v = \omega r$ ориентируемой материальной точки определяет центростремительное ускорение в виде $\vec{n} \kappa v^2 = [\vec{\omega} [\vec{\omega} \vec{r}]]$ то из (63) следует

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = +m t \frac{dv}{dt} + m \vec{n} \kappa v^2 = -m \vec{a} - m [\vec{\omega} [\vec{\omega} \vec{r}]], \quad (64)$$

где ускорение $\vec{a}$ направлено по касательной к траектории, а $-m [\vec{\omega} [\vec{\omega} \vec{R}]]$ - центробежная сила инерции. В этом случае $\vec{\omega}$ - орбитальная угловая скорость. С другой стороны, из уравнений (60)-(62) видно, что, когда орбитальная угловая скорость равна нулю (траектория - прямая линия, поскольку $\kappa = 1/R=0$), уравнения описывают собственное вращение частицы (спин). Более того, угловая скорость собственного вращения $\chi(s) = \Omega_{(3)}^{(2)}$ определяется через первую, вторую и третью производную трансляционных координат как

$$\chi(s) = \frac{(\vec{x}' \cdot \vec{x}'' \cdot \vec{x}''')}{(\vec{x}' \times \vec{x}'')^2}, \quad (65)$$

где введены обозначения $\vec{x}' = d\vec{x}/ds$ и т.д. Отсюда видно, что кручение (или собственное вращение - спин ориентируемой материальной точки) обращается в нуль, при равенстве нулю третьей производной трансляционной координаты $\vec{x}''' = d^3 \vec{x}/ds^3$. Таким образом, механика, в которой нет третьей производной, не в состоянии описывать собственное вращение материальных частиц!

IV. СИММЕТРИЧНЫЙ ВИБРАТОР КАК ПРИМЕР ДВИЖЕНИЯ ТОЛЬКО ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛ ИНЕРЦИИ

Рассмотрим механическую систему, состоящую из центральной массы M и двух масс m (рис. 8). В центре массы M расположена ось вращения O_1 , вокруг которой вращаются на нерастяжимых, невесомых стержнях r массы. Вращение масс m происходит синхронно и в разные стороны.

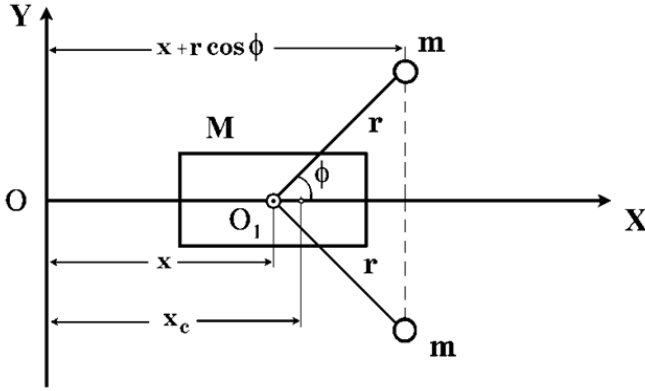


Рис. 8. Симметричный вибратор.

Используя обозначения на рис.8 и учитывая симметрию механической системы трех тел относительно оси x , получим следующее выражение для кинетической энергии (лагранжиана) данной системы

$$L = T = \frac{1}{2}(M + 2m)v^2 + mr^2\omega^2 - 2mrv\omega \sin \phi, \quad (66)$$

где $v = v_x = dx/dt$ - скорость центрального тела M , $\omega = d\phi/dt$ - угловая скорость вращения грузов m , ϕ - угол поворота стержней. Введем момент инерции для вращающихся грузов $J = 2mr^2$, тогда полную энергию (66) можно представить как

$$T = \frac{1}{2}((M + 2m)v^2 + J\omega^2) - 2mrv\omega \sin \phi. \quad (67)$$

Из (67) следует, что сумма поступательной и вращательной энергий у симметричного вибратора неаддитивна, поскольку содержит дополнительно отрицательную энергию взаимодействия $-2mrv\omega \sin \phi$ между поступательной энергией $(M + 2m)v^2/2$ и вращательной энергией $J\omega^2/2$. Записывая уравнения Лагранжа относительно переменных x и ϕ ,

$$0) \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad 1) \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0, \quad (68)$$

находим уравнения движения системы в виде

$$(M + 2m)\dot{v}_c = (M + 2m)\dot{v} - 2mr\dot{\omega} \sin \phi - 2mr\omega^2 \cos \phi = 0 \quad (69)$$

$$J\dot{\omega} = \frac{J}{r}\ddot{x} \sin \phi \quad (70)$$

В этих уравнениях $(M + 2m)$ - полная масса системы, $v_A = dx_A/dt$ - скорость центра масс, $\dot{\omega} = d\omega/dt$ - угловое ускорение $J = 2mr^2$ - момент инерции.

Поступательное уравнение (69) можно представить как

$$\ddot{x} = (\dot{\omega} \sin \phi + \omega^2 \cos \phi), \quad B = rk^2, \quad k^2 = 2m/(M + 2m). \quad (71)$$

Подставляя это соотношение во вращательное уравнение (70), получим после преобразований

$$\dot{\omega} - k^2\omega^2 \frac{\sin \phi \cos \phi}{1 - k^2 \sin^2 \phi} = 0, \quad 1 - k^2 \sin^2 \phi \neq 0. \quad (72)$$

В этих уравнениях $(M + 2m)$ - полная масса системы, $v_A = dx_A/dt$ - скорость центра масс, $k^2 = 2m/(M + 2m)$ - безразмерный множитель, $\dot{\omega} = d\omega/dt$ - угловое ускорение. Из уравнения (67) следует, что на центр масс данной системы действуют три силы инерции. Это поступательная сила $(M + 2m)\dot{v}$, проекция на ось x центробежной силы $-2mr\omega^2 \cos \phi$ и проекция на ось x силы $-2mr\dot{\omega} \sin \phi$, порожденной угловым ускорением $\dot{\omega} = d\omega/dt$. Сумма этих сил инерции равна нулю, поэтому центр масс симметричного вибратора либо покоится, либо движется прямолинейно и равномерно, т.е. система отсчета, связанная с центром масс, является (квази) инерциальной.

После подстановки (71) в (70), находим

$$\ddot{x} = \frac{B \cos \phi}{1 - k^2 \sin^2 \phi} \omega^2. \quad (73)$$

Для энергии (66) выполняется закон сохранения

$$\frac{d}{dt} T = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}(M + 2m)v^2 + mr^2\omega^2 - 2mrv\omega \sin \phi \right) = 0. \quad (74)$$

Действительно, перепишем уравнения движения (70) и (71) в виде

$$r\dot{\omega} - \ddot{x} \sin \phi = 0, \quad \ddot{x} - B \frac{d}{dt} (\omega \sin \phi) = 0.$$

$$B = rk^2 = 2mr/(M + 2m) \quad (75)$$

Умножим первое из этих уравнений на $2mrv$, а второе на $(M + 2m)\dot{x}$ и сложим. В результате преобразований получим закон сохранения (74). Закон сохранения импульса системы находим из (68 а))

$$\frac{d}{dt} P = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{d}{dt} ((M + 2m)\dot{x} - 2mr\omega \sin \phi) = 0, \quad (76)$$

откуда

$$P = (M + 2m)\dot{x} - 2mr\omega \sin \phi = \text{const}. \quad (77)$$

Положение центра масс симметричного вибратора находим из формулы

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^3 m_i x_i}{\sum_{i=1}^3 m_i} = \frac{Mx + 2m(x + r \cos \phi)}{M + 2m} = x + B \cos \phi. \quad (78)$$

Дифференцируя (78) по времени находим

$$v_c = v(t) - B\omega \sin \phi. \quad (79)$$

Умножая $(M + 2m)$ на (79) и учитывая (77), получим выражение для импульса центра масс в виде

$$P_c = P = (M + 2m)\dot{x} - 2mr\omega \sin \phi = \text{const}. \quad (80)$$

Дифференцируя (80) по времени, получаем уравнение движения (69).

Заметим, что симметричный вибратор представляет собой осциллятор (уравнение (78)) и ротатор (уравнение (70)) одновременно. При этом энергия поступательного движения осциллятора переходит во вращательную энергию ротатора и наоборот. Если в реальной модели симметричного вибратора пренебречь силами трения, то этот процесс будет происходить до бесконечности (по инерции), хотя все элементы системы трех масс движутся ускоренно. Этот вывод противоречит первому закону механики Ньютона, поскольку в механике Ньютона движение тел по инерции происходит при их прямолинейном и равномерном движении.

А. Интегрирование уравнений движения симметричного вибратора

Представим трансляционное уравнение (75) в виде

$$\ddot{x} = B \frac{d}{dt} (\omega \sin \phi) = -B \frac{d^2}{dt^2} (\cos \phi(t)). \quad (81)$$

Интегрируя дважды это уравнение, имеем

$$x = -B \cos \phi(t) + c'_1 t + c'_2, \quad B = rk^2 = 2mr/(M+2m), \quad (82)$$

где c' и c'' - константы интегрирования. Путь в начальный момент удовлетворяются условия $x = x_0 = x_c$, $v = v_0 = v_c$, $\phi = \phi_0$, $\omega = \omega_0$, тогда решение (82) можно записать как

$$x = A + v_c t - B \cos \phi(t) = A + x_c - B \cos \phi(t), \quad v_c = v_0 = \text{const}, \quad (83)$$

где $A = x_c + B \cos \phi_0 = \text{const}$. При условии, что $A = 0$, решение (83) совпадает с (78). Из (83) для скорости $v(t)$ имеем: $v(t) = v_A + B\omega \sin \phi$, что совпадает с (79).

Заменой переменной $z = \sin \phi$, $dz = \cos \phi d\phi$ вращательное уравнение (72) преобразуется к виду

$$\frac{d\omega}{\omega} = \frac{z}{(1/k)^2 - z^2} dz. \quad (84)$$

При условии, что $(1/k)^2 > 1$ и $|z^2| < 1$, уравнение (84) интегрируется и мы получим

$$\ln \omega = -\frac{1}{2} \ln [(1/k)^2 - z^2] + \ln c_1,$$

где c_1 - константа интегрирования. Запишем уравнение (85) как

$$\ln \frac{\omega}{A_1} = \frac{1}{\sqrt{(1/k)^2 - z^2}} \quad (85)$$

или

$$\omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{c_1}{\sqrt{(1/k)^2 - z^2}}. \quad (86)$$

Пусть в начальный момент t заданы начальные условия

$$\phi = \phi_0, \quad \omega = \omega_0, \quad (87)$$

Тогда

$$\omega_0 = \frac{c_1}{k \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi_0}}$$

и окончательно имеем решение для частоты вращения малых грузов

$$\omega = \frac{\omega_0 \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi_0}}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}. \quad (88)$$

Разделяя переменные в уравнении (86), и замечая, что $z = \sin \phi$, получим

$$\frac{1}{k} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi} d\phi = c_1 dt.$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$\frac{1}{k} E(\phi, k) d\phi = \frac{1}{k} \int_0^\phi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi} d\phi = c_1 dt + c_2, \quad (89)$$

где c_2 - константа интегрирования, а $E(\phi, k)$ - эллиптический интеграл второго рода. Из соотношения (89) следует, что для угла ϕ вращательное уравнение не может быть проинтегрировано в элементарных функциях. Интегрируя уравнение (89) и используя начальные условия (87), получим частное решение для угла поворота $\phi(t)$ в виде

$$E(\phi(t), k) d\phi = \omega_0 t \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi(t)} + E(\phi_0, k). \quad (90)$$

V. СИММЕТРИЧНЫЙ ВИБРАТОР КАК 4D ГИРОСКОП

Исходя из формулы (4), мы можем записать скорость v_x как

$$v_x = c \tanh \theta_x, \quad (91)$$

где c - скорость света, θ_x - псевдоевклидов угол в плоскости $x - ct$. Это соотношение позволяет записать полную энергию (66) в виде

$$L = T = \frac{1}{2} (M+2m) (c \tanh \theta_x)^2 + mr^2 \omega^2 - 2mr\omega (c \tanh \theta_x) \sin \phi, \quad (92)$$

а "поступательное" уравнение движения (69) как

$$(M+2m) \left(c \frac{d(\tanh \theta_x)}{dt} \right) - 2mr\dot{\omega} \sin \phi - 2mr\omega^2 \cos \phi = 0. \quad (93)$$

В таком виде уравнения движения симметричного вибратора рассматриваются только как вращательное движение в 4D пространстве-времени. Поэтому *простейшая механическая система, представленная на рис.8, была названа автором 4D гироскопом*. Идея о том, что любое движение в природе сводится к вращению, была высказана еще Рене Декартом, при этом новая механика, которой подчиняется 4D гироскоп, получила название *механика Декарта* [16]. В отличие от механики материальной точки Ньютона, механика зависит только от неголономных угловых координат. В ней определена не только трансляционная метрика $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = \eta_{AB} e_\alpha^A e_\beta^B dx^\alpha dx^\beta$, но и вращательная метрика $d\tau^2 = d\chi_\beta^\alpha d\chi_\alpha^\beta = T_{\beta\gamma}^\alpha T_{\alpha\sigma}^\beta dx^\gamma dx^\sigma$. Механика Декарта содержит неголономные угловые переменные φ, θ, ψ как элементы пространства, поэтому мы будем называть ее *неголономной механикой*. Известно, что

в неголономной механике уравнения Лагранжа (68) обобщаются, принимая вид [17]

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) - \frac{\partial T}{\partial x^\alpha} = -2 \partial \dot{x}^\beta \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^\gamma} \Omega_{\beta\alpha}^\gamma, \quad (94)$$

где $\Omega_{\beta\alpha}^\gamma$ - объект неголономности (43).

Утверждение. Уравнения геодезических пространства абсолютного параллелизма $A_3(3)$ совпадают с обобщенными уравнениями движения Лагранжа (94).

Доказательство.

Уравнения геодезических пространства $A_3(3)$ находятся из уравнения параллельного переноса ковектора скорости $v^\beta = dx^\beta/ds$ относительно связности (39)

$$\frac{dv^\beta}{ds} + \Delta_{\alpha\gamma}^\beta v^\alpha v^\gamma = \frac{du^\beta}{ds} + \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta v^\alpha v^\gamma + T_{\alpha\gamma}^\beta v^\alpha v^\gamma = 0. \quad (95)$$

Учитывая (42), запишем уравнения (95) как [11]

$$\frac{dv^\beta}{ds} + \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta v^\alpha v^\gamma + 2g^{\beta\chi} \Omega_{\chi(\alpha\gamma)} v^\alpha v^\gamma = 0, \quad (96)$$

где $g^{\beta\chi}$ - метрический тензор пространства $A_3(3)$, $\Omega_{\chi(\alpha\gamma)}$ - симметричная по индексам α, γ часть коэффициентов вращения Риччи (42), ds - корень квадратный из метрики (37). Подставляя уравнения (94) соотношение

$$L = T = -mc \left(g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} \right)^{1/2}, \quad (97)$$

и учитывая, что

$$-mc ds = -mc (g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta)^{1/2} = T dt, \quad (98)$$

получим из (94) уравнения (96), умноженные на массу m .

Понятно, что в уравнениях (96) сила

$$m2g^{\beta\chi} \Omega_{\chi(\alpha\gamma)} v^\alpha v^\gamma \quad (99)$$

Описывает геометризованную силу инерции, порожденную вращением трехгранника Эйлера.

А. Ускоренное движение центра масс свободного 4D гироскопа

Покажем, что сила инерции (99) может вызвать ускоренное периодическое движение центра масс свободного от внешних сил 4D гироскопа. Используя соотношение (79), представим полную энергию (66) в виде

$$T = \frac{1}{2}(M+2m)v_A^2 + mr^2\omega^2(1 - k^2 \sin^2 \phi(t)) \quad (100)$$

и запишем закон сохранения (74) как

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}(M+2m)v_A^2 \right) = -\frac{d}{dt} [mr^2\omega^2(1 - k^2 \sin^2 \phi(t))]. \quad (101)$$

Если предположить, что баланс сил инерции в уравнении (69) может нарушаться, т.е. $\dot{v}_A \neq 0$, тогда из (101) следует

$$(M+2m)v_A \dot{v}_A = -2mr^2\omega\dot{\omega} + 2mr^2\omega^3 k^2 \sin 2\phi \quad (102)$$

или

$$\dot{v}_A = -\frac{2mr^2\omega\dot{\omega} - 2mr^2\omega^3 k^2 \sin 2\phi}{(M+2m)v_A} = B\omega r \frac{(\dot{\omega} - \omega^2 \sin 2\phi)}{v_A}. \quad (103)$$

Отсюда следует, что скорость центра масс свободного 4D гироскопа становится переменной величиной, если в правой части уравнения (69) и (70) появляются сила и момент силы инерции, которые, тем не менее, оставляют в силе закон сохранения (101). Чтобы показать это, запишем уравнения (75) в виде

$$1) r\dot{\omega} - \ddot{x} \sin \phi = -\Phi \dot{x}, \quad 2) \dot{v}_A = \ddot{x} - B \frac{d}{dt} (\omega \sin \phi) = rk^2 \Phi \omega = B\Phi \omega, \quad (104)$$

где Φ - внутреннее поле инерции, порождающее силу инерции F_{inr} и момент силы инерции M_{inr}

$$F_{inr} = (M+2m)B\Phi\omega, \quad M_{inr} = -2mr\Phi\dot{x}. \quad (105)$$

Умножим уравнение (104 1)) на $2mr\omega$, а уравнение (104 2)) на $(M+2m)\dot{x}$ и сложим. В результате правые части уравнений (104) сокращаются и, после преобразований, мы получаем закон сохранения (74) и закон сохранения (101), в котором $v_A(t) \neq const$.

В. Геометризация уравнений движения свободного 4D гироскопа

В классической механике движение механической системы N частиц, свободной от действия внешних сил, в голономных координатах описывается уравнениями геодезических

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0, \quad i, j, k \dots = 1, 2, 3 \dots N \quad (106)$$

конфигурационного риманова пространства [18]. Связь между метрикой конфигурационного пространства событий и нерелятивистской энергией T системы N частиц имеет вид

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k = \frac{2T}{M^*} dt^2, \quad (107)$$

где g_{ik} - метрический тензор конфигурационного пространства, M^* - полная масса системы. В нашем случае $i, j, k \dots = 1, 2$ и описание движения трех тел сводится (в силу симметрии задачи) к описанию движения двух тел, при этом формула (107) принимает вид

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k = \frac{2T}{M+2m} dt^2, \quad i, j, k \dots = 1, 2. \quad (108)$$

Для удобства, при геометризации уравнений движения 4D гироскопа, введем следующие обозначения:

$$\omega' = r\omega, \quad k^2 = 2m/(M+2m), \quad v_c = v(t) - k^2 \omega' \sin \phi, \quad g' = k^2 (1 - k^2 \sin^2 \phi) = k^2 g. \quad (109)$$

В этих обозначениях кинетическая энергия (100) переписывается как

$$L = T = \frac{1}{2}(M+2m) (v_c^2 + k^2(1 - k^2 \sin^2 \phi) \omega') =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}(M+2m)(v_c^2 + g'\omega') = \frac{1}{2}(M+2m)g_{ik}v^i v^k = \\
&= \frac{1}{2}(M+2m)\dot{s}^2
\end{aligned}
\quad (110)$$

где

$$v^1 = v_c, \quad v^2 = \omega', \quad \dot{s} = ds/dt \quad (111)$$

и метрический тензор g_{ik} в (108) и в (110) принимает вид

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g' \end{pmatrix}, \quad i, j, k \dots = 1, 2. \quad (112)$$

В нашем случае в уравнениях геодезических (106) мы будем использовать координаты

$$x_1 = x_c, \quad x_2 = r\phi = \phi', \quad (112a)$$

тогда для скорости центра масс V_c и угловой скорости вращения грузов Ω при дифференцировании по длине дуги ds имеем

$$V_c = \frac{dx^1}{ds} = \frac{dx_c}{ds}, \quad \Omega = \frac{dx^2}{ds} = \frac{d\phi'}{ds}, \quad (113)$$

Используя определение для символов Кристоффеля (41) и метрический тензор (112), находим отличную от нуля компоненту Γ_{jk}^i в уравнении (106)

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{\sqrt{g'}} \frac{d\sqrt{g'}}{d\phi'} \quad (114)$$

Подставляя (113) и (114) в уравнения движения (106), получим уравнения движения 4D гироскопа в виде

$$\frac{dV_c}{ds} = 0, \quad \frac{d\Omega}{ds} + \frac{1}{\sqrt{g'}} \frac{d\sqrt{g'}}{d\phi'} \Omega^2 = 0. \quad (115)$$

Переходя к дифференцированию по времени, имеем

$$v_c = \frac{dx_c}{dt} = \frac{dx_c}{ds} \frac{ds}{dt} = V_c \dot{s}, \quad \omega' = \frac{d\phi'}{dt} = \frac{d\phi'}{ds} \frac{ds}{dt} = \Omega \dot{s}. \quad (116)$$

Используя эти соотношения, получим из (115) уравнения движения в виде

$$\frac{dv_c}{dt} = 0, \quad (117)$$

$$\frac{d\omega'}{dt} + \frac{1}{\sqrt{g'}} \frac{d\sqrt{g'}}{d\phi'} (\omega')^2 = 0, \quad (118)$$

Используя равенство

$$\frac{1}{\sqrt{g'}} \frac{d\sqrt{g'}}{d\phi'} = \frac{1}{r} \frac{k^2 \sin \phi \cos \phi}{1 - k^2 \sin^2 \phi} \quad (118a)$$

и учитывая обозначения (109) и (112a), находим после интегрирования

$$v_c = \text{const}, \quad \omega(t) = \omega_0 \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi_0}}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi(t)}}, \quad (119)$$

Легко видеть, что эти решения совпадают с решениями (83) и (88).

Поскольку из формулы (110) следует

$$\dot{s}^2 = v_c^2 + g'\omega'^2 = V_c^2 \dot{s}^2 + g'\Omega^2 \dot{s}^2,$$

то

$$V_c^2 + g'\Omega^2 = 1. \quad (120)$$

Используя эти соотношения, выразим V_c и Ω через некоторый угол η следующим образом

$$V_c = \cos \eta = a, \quad \sqrt{g'(t)}\Omega(t) = \sin \eta = b, \quad (121)$$

где a и b - константы, удовлетворяющие условию $a^2 + b^2 = 1$. Равенство (120) можно рассматривать как закон сохранения энергии свободного 4D гироскопа, при этом величины V_c и $\sqrt{g'}\Omega$ могут принимать различные (постоянные) значения от нуля до единицы при одной и той же полной энергии (110).

С. Свободный 4D гироскоп в неголономной механике

Рассмотрим ситуацию, когда угол η является функцией времени

$$V_c(t) = \cos \eta(t) = a(t), \quad \sqrt{g'(t)}\Omega(t) = \sin \eta(t) = b(t), \quad (122)$$

при этом закон сохранения (120) продолжает выполняться

$$a^2(t) + b^2(t) = 1. \quad (123)$$

В этом случае уравнения движения свободного 4D гироскопа принимают вид (104), при этом скорость центра масс становится переменной величиной.

В самом деле, в неголономной механике Декарта уравнения (106) обобщаются и имеют вид

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Delta_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} &= \frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} + T_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = \\
&= \frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} + 2g^{im}\Omega_{m(jk)} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0, \\
i, j, k \dots &= 1, 2, 3 \dots N.
\end{aligned}
\quad (122)$$

Для вычисления дополнительных сил инерции $2(M+2m)g^{im}\Omega_{m(jk)}dx^j/dt dx^k/dt$, действующих на центр масс 4D гироскопа, мы представим метрический тензор (112) через неголономную диаду e_i^a ($i=1,2, a=1,2$) как

$$g_{ik} = \Lambda_{ab} e_i^a e_k^b, \quad (123)$$

где

$$\Lambda_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (124)$$

- метрический тензор локального пространства и e_i^a - ортонормированная диада, удовлетворяющая условиям ортогональности

$$\vec{e}_1 \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \vec{e}_2 = 1, \quad \vec{e}_1 \vec{e}_2 = 0, \quad (125)$$

причем

$$\begin{aligned}
e_i^a(\eta(t)) &= \begin{pmatrix} \cos \eta & \sqrt{g'} \sin \eta \\ -\sin \eta & \sqrt{g'} \cos \eta \end{pmatrix}, \\
e_i^a(\eta(t)) &= \begin{pmatrix} \cos \eta & -\sin \eta \\ \sin \eta / \sqrt{g'} & \cos \eta / \sqrt{g'} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
\quad (126),$$

Используя определения (39), (41) - (43), метрику (123) и диаду (126), находим отличные от нуля компоненты связности Δ_{jk}^i абсолютного параллелизма $A_2(2)$, компоненты символов Кристоффеля Γ_{jk}^i , компоненты коэффициентов вращения Риччи T_{jk}^i и компоненты кручения пространства $A_2(2)$ Ω_{jk}^i

$$\Delta_{jk}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{g'} \frac{d\eta}{d\phi'} \end{pmatrix}, \quad \Delta_{jk}^2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{g'}} \frac{d\eta}{d\phi'} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{g'}} \frac{d\sqrt{g'}}{d\phi'} \end{pmatrix}, \quad (127)$$

$$T_{jk}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{g'} \frac{d\eta}{d\phi'} \end{pmatrix} = T_{22}^1 = -T_{12}^2,$$

$$T_{jk}^2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{g'}} \frac{d\eta}{d\phi'} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = T_{11}^2, \quad (128)$$

$$\Omega_{jk}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2g'} \frac{d\sqrt{g'}}{d\phi'} \sin \eta \cos \eta \\ \frac{1}{2g'} \frac{d\sqrt{g'}}{d\phi'} \sin \eta \cos \eta & 0 \end{pmatrix} = \Omega_{12}^2, \quad (129)$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{\sqrt{g'}} \frac{d\sqrt{g'}}{d\phi'}. \quad (130)$$

Расписывая уравнения (122) с учетом (127)-(130), получим

$$\frac{d^2 x^1}{ds^2} + \Gamma_{22}^1 \left(\frac{dx^2}{ds} \right)^2 = 0, \quad (131)$$

$$\frac{d^2 x^2}{ds^2} + \frac{1}{\sqrt{g'}} \frac{d\sqrt{g'}}{d\phi'} \Omega^2 = 2\Omega_{12}^2 \frac{dx^1}{ds} \frac{dx^2}{ds} = 0. \quad (132)$$

Подставляя в уравнения (131) и (132) соотношения (128)-(130) и, учитывая (122) находим

$$\frac{d^2 x_A}{ds^2} = -\sqrt{g'} \frac{d\eta}{d\phi'} \Omega^2, \quad (133)$$

$$\frac{d^2 \phi'}{ds^2} + \frac{1}{\sqrt{g'}} \frac{d\sqrt{g'}}{d\phi'} \Omega^2 = \frac{1}{\sqrt{g'}} \frac{d\eta}{d\phi'} V_c \Omega. \quad (134)$$

Переходя, с помощью (116), к дифференцированию по времени, имеем вместо (133), (134)

$$\frac{dv_c}{dt} = -\sqrt{g'} \frac{d\eta}{d\phi'} \omega', \quad (135)$$

$$\frac{d\omega'}{dt} + \frac{1}{\sqrt{g'}} \frac{d\sqrt{g'}}{d\phi'} \omega'^2 = \frac{1}{\sqrt{g'}} \frac{d\eta}{d\phi'} v_c,$$

$$\frac{1}{\sqrt{g'}} \frac{d\sqrt{g'}}{d\phi'} = \frac{1}{r} \frac{k^2 \sin \phi \cos \phi}{1 - k^2 \sin^2 \phi} \quad (136)$$

Здесь мы опять воспользовались обозначениями (111) и учли (118а). Переходя к переменным ϕ , ω и вводя обозначение

$$\Phi(t) = \frac{\sqrt{g'}}{k^2} \frac{d\eta}{d\phi'}, \quad (137)$$

перепишем уравнения (135) и (136) в виде

$$\frac{dv_c}{dt} = rk^2 \Phi \omega = \Phi \omega, \quad (138)$$

$$\frac{d\omega}{dt} - \frac{k^2 \omega^2 \sin \phi \cos \phi}{1 - k^2 \sin^2 \phi} = -\frac{1}{r} \Phi v_c. \quad (139)$$

Подставляя функцию Φ из уравнения (138) в уравнение (139), находим

$$\frac{\dot{\omega}(1 - k^2 \sin^2 \phi) - k^2 \omega^2 \sin \phi \cos \phi}{1 - k^2 \sin^2 \phi} = -\frac{\dot{v}_c v_A}{\omega r (1 - k^2 \sin^2 \phi)} \quad (140)$$

откуда

$$\dot{v}_c = -\omega r \frac{\dot{\omega}(1 - k^2 \sin^2 \phi) - k^2 \omega^2 \sin 2\phi}{v_A}. \quad (141)$$

Сравнивая эту формулу с (103), можно увидеть у них общую структуру, показывающую, что ускорение центра масс 4D гироскопа порождено изменением угловой скорости вращения грузов.

D. Пространственно-временная нутация 4D гироскопа. Уравнения Сидорова

Введем обозначение

$$\omega* = r\omega\sqrt{g'},$$

тогда уравнения (133) и (134) запишутся как

$$\dot{v}_c = k^2 \frac{\Phi}{\sqrt{g'}} \omega*, \quad (142)$$

$$\dot{\omega}* = -\frac{\Phi}{\sqrt{g'}} v_c, \quad (143)$$

Умножая уравнение (142) на $(M + 2m)$, а уравнение (143) на $2m$, получим

$$\dot{p} = \frac{\Phi}{\sqrt{g'}} q, \quad \dot{q} = -k^2 \frac{\Phi}{\sqrt{g'}} p,$$

где

$$p = (M + 2m)v_c, \quad q = 2m\omega*.$$

Поскольку

$$\dot{p}q = \frac{\Phi}{\sqrt{g'}} q^2, \quad \dot{q}p = -k^2 \frac{\Phi}{\sqrt{g'}} p^2,$$

то мы имеем следующий коммутатор

$$\dot{p}q - \dot{q}p = \frac{\Phi}{\sqrt{g'}} (q^2 + k^2 p^2) = \frac{4m\Phi}{\sqrt{g'}} T, \quad (144)$$

где $T = const$ - полная энергия 4D гироскопа.

Уравнения (142), (143), полученные впервые Андреем Сидоровым [19], можно представить в виде

$$\dot{v}*c = k^2 \Phi* \omega*, \quad v*c = v_c - v_0, \quad (145)$$

$$\omega* = -\Phi* v*c, \quad \Phi* = \Phi/\sqrt{g'}, \quad \omega* = r\omega\sqrt{g'}, \quad (146)$$

где $v_0 = const$ - начальная скорость центра масс. Предположим, что

$$\Phi* = \Phi/\sqrt{g'} = \kappa_0 = const$$

и запишем уравнения (145), (146) как

$$\dot{v}*c = k^2 \kappa_0 \omega*, \quad \dot{\omega}* = -\kappa_0 v*c. \quad (147)$$

Дифференцируя первое уравнение по времени и используя второе, получим: $\ddot{v}_c = -k^2 \kappa_0^2 v_c$. Решение этого уравнения запишется как

$$v_c = A \cos(k \kappa_0 t) + C \sin(k \kappa_0 t).$$

Поскольку при $t = 0$ скорость $v_c = 0$, то $A = 0$ и $C = v_0$, поэтому

$$v_c(t) = v_0 \sin(k \kappa_0 t) + v_0 = v_0(1 + \sin(k \kappa_0 t)). \quad (148)$$

Подставляя это решение во второе из уравнений (147) и интегрируя его, имеем

$$\omega^*(t) = \frac{v_0}{k} \cos(k \kappa_0 t) + \left(\omega^*_{0} - \frac{v_0}{k} \right), \quad \omega^* = \sqrt{g'} r \omega$$

или

$$\omega(t) = \frac{v_0}{\sqrt{g'} r k} \cos(k \Phi_0 t) + \frac{\omega_0 \sqrt{g'(\phi_0)} - v_0/k}{\sqrt{g'}}. \quad (149)$$

Легко видеть, что при условии $v_0 = 0$ решения (148) и (149) переходят в решения голономной механики (117) и (118). На рис.9 показана пространственно-временная нутация центра масс 4D гироскопа, при которой пространственно-временной угол нутации $\theta_x = \arctan v_{cx}/c$ меняет свое значение в соответствии с формулой (148).

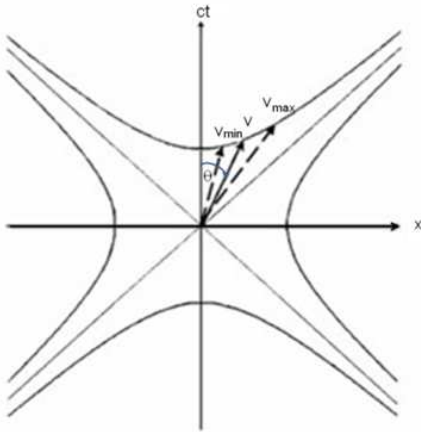


Рис. 9. Нутация 4D гироскопа в плоскости $x - ct$.

Е. Экспериментальное доказательство существования пространственно-временной нутации

Для проверки существования пространственно-временной нутации 4D гироскопа была создана экспериментальная установка [5], позволяющая измерять все динамические характеристики 4D гироскопа в режиме реального времени (рис.10). 4D гироскоп был установлен на тележке, которая двигалась по горизонтальным рельсам с минимальным трением. На тележке закреплена пружина (рис.10), обеспечивающая “абсолютно” упругий удар о стенку всей системы при закрепленных грузах m 4D гироскопа (внутреннее вращение отсутствует). Затем грузы освобождаются. До момента удара тележка,

на которой закреплен 4D гироскоп, раскачивалась внешней силой, а затем ему придается скорость движения в направлении металлической пластины. График скорости корпуса тележки и центра масс системы до удара о стенку представлен на рис.11, слева от момента удара. Уже на графике скоростей до удара видно, что скорость центра масс свободного 4D гироскопа меняется под действием раскачивающей внешней силы. После удара 4D гироскоп движется свободно, при этом скорость центра масс v_c меняется в результате пространственно-временной нутации в соответствии с формулой (148).

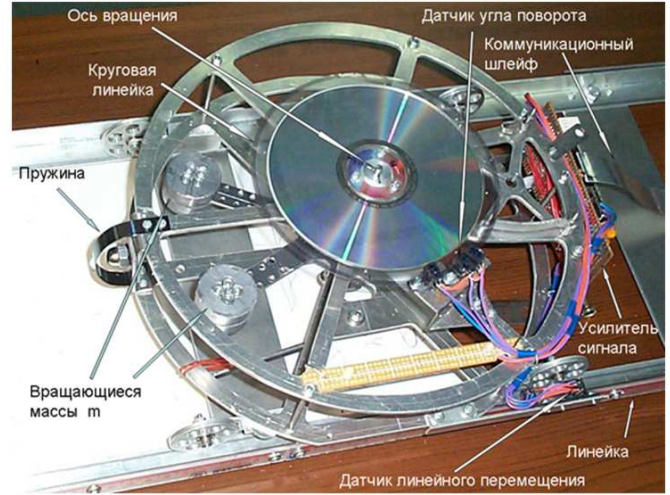


Рис. 10. 4D гироскоп на тележке, установленной на горизонтальных рельсах.

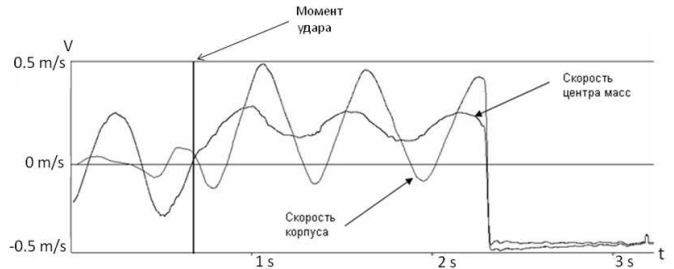


Рис. 11. Экспериментальное наблюдение пространственно-временной нутации.

VI. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящее время нам известны три обобщения механики Ньютона – это релятивистская механика (Эйнштейн 1905 г.), общерелятивистская механика (Эйнштейн 1915 г.) и квантовая механика (Шредингер 1926 г.). В 2005 г. автором была предложена неголономная механика Декарта [16], которая представляет собой четвертое обобщение механики Ньютона. В статье в качестве примера механической системы, подчиняющейся уравнениям неголономной механики Декарта, был

рассмотрен 4D гироскоп, элементы которого вращаются не только в пространстве, но и в пространственно-временной области. Предсказанная в рамках негोलомонной механики Декарта пространственно-временная нутация 4D гироскопа наблюдается экспериментально. Это свойство может быть использовано для передвижения механических систем в различных средах – в космосе, на воде, под водой и по поверхности земли.

Литература

- 1) *Ньютон И.* // Математические начала натуральной философии. Перевод с латинского и примечания А. Н. Крылова. М.: Наука, 1989. 688 стр. ISBN 5-02-000747-1.
- 2) *Эйлер Л.* // Основы динамики точки. ОНТИ-НКТП-СССР, 1938, с. 537.
- 3) *Дюринг Е.* // Критическая история общих принципов механики. 1893. Рус. перевод 3-го изд., Москва, сс. 531.
- 4) *Мах Э.* // Механика: историко-критический очерк ее развития. 1909. Рус. перевод 6-го изд. СПб., сс. 446.
- 5) *Эйнштейн А. Инфельд Л.* // Эволюция физики. Собр. науч. тр. М.: Наука, 1967. Т. 4., сс. 358-543.
- 6) *Боголюбов А.Н.* . // Киевская дискуссия о силах инерции. // Из истории развития физико-математических наук. 1981, Киев: Наукова думка, сс. 5-13.
- 7) *Левенсон Л.Б.* // Вестник инженеров и техников, №6, 1936. сс. 378-382.
- 8) *Седов Л.И.* // Очерки, связанные с основаниями механики и физики. М.: Знание, 1983.
- 9) *Ишлинский Ю.А.* // Механика относительного движения и силы инерции. М.: Наука, 1983.
- 10) *Ольховский И.И.* // Курс теоретической механики для физиков. М.: Наука, 1970.
- 11) *Шипов Г.И.* // Теория физического вакуума, теория эксперименты и технологии, М., Наука, 1997. 450 с.
- 12) *Шипов Г.И.* // Застой в теоретической физике и пути выхода из него. Механика. “Академия Тринитаризма”, М., Эл №77-6567, публ.18485, 02.02.2014, <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0231/008a/02311123.htm>
- 13) *Ricci G.* // Mem. Acc. Linc. 1895. Vol.2. Ser. 5. Pp. 276-322.
- 14) *Cartan E.* // Compt. Rend.1922. Vol. 174, p. 437.
- 15) *Frenet F.* // Jour. de Math. 1852. Vol. 17. P. 437-447.
- 16) *Shipov G.* // Decartes' Mechanics – Fourth Generalization of Newton's Mechanics. In "7 th Intern. Conference Computing Anticipatory Systems" ~ HEC - ULg, Liege, Belgium, 2005, ISSN 1373-5411 ISBN 2-930396-05-9 P. 178
- 17) *Схоутен Я.А.* // Тензорный анализ для физиков, 1965. М.: Наука, ГРФМЛ, с. 455.
- 18) *Рашевский П.К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. 1964. М.: Наука, с. 664.
- 19) *Шипов Г.И., Сидоров А.Н.* Теоретические и экс-

периментальные исследования реактивного движения без отбрасывания массы. “Физика взаимодействия живых объектов с окружающей средой”, 2004, М.: с.230.