Журнал Формирующихся Направлений Науки
номер 4(2), стр. 6-7, 2014

статья получена: 20.03.2014
статья принята к публикации: 14.05.2014
http://www.unconv-science.org/n4/nevolin/

Движение квантовых частиц с нулевой массой покоя

В.К. Неволин[1]

***Аннотация*—В свое время Луи де Бройль весьма был озадачен тем, что уравнение Шредингера "покоится" на законах сохранения движения для квантов света и, тем не менее, не описывает волновые свойства фотонов [1]. В квазигидродинамическом представлении такое описание возможно.**

В квазигидродинамическом представлении [2], [3] уравнения движения для инфинитного движения квантовой частицы массы m в произвольном внешнем поле $W(r,t)$ записываются в виде:

$$m\frac{\partial\varrho}{\partial t} + div\rho\vec{P} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial\vec{P}}{\partial t} = -\nabla\left(\frac{P^2}{2m} + W + \frac{\hbar^2(\nabla\rho)^2}{8m\varrho^2} - \frac{\hbar^2\Delta\rho}{4m\varrho}\right) \quad (2)$$

где $\rho(\vec{r},t)$ - пространственно-временное распределение плотности вероятности частицы, $\vec{P}(\vec{r},t)$ - макроскопический импульс частицы, $W(\vec{r},t)$ – произвольная потенциальная энергия.

Поскольку первое уравнение приводится во многих учебниках по квантовой механике, а второе используется не часто, приведем краткую историю написания этой системы уравнений. Если ввести стандартные обозначения:

$$\rho(\vec{r},t) = \Psi\Psi^* \quad (3)$$

$$\vec{P} = \frac{i\cdot\hbar}{2}(\Psi\nabla\Psi^* - \Psi\nabla\Psi^*) \quad (4)$$

то, из уравнения Шредингера можно получить выписанную выше систему уравнений (1) и (2). Как оказалось после публикации Э. Шредингером своего уравнения, на эту тему откликнулся Е. Маделунг и в 1926 году опубликовал уравнения движения квантовой частицы в физических переменных, которые имели квазигидродинамический вид. Одно из двух уравнений оказалось нелинейным, что создает существенный барьер для аналитических решений и возможно в силу этого мало распространено. Раскопал всю эту библиографию Д. Бом, американский физик, который в 50-х годах прошлого века внес значительный вклад в развитие квазигидродинамического представления для описания квантовых систем [2], [4]. Нелинейный метод описания движения квантовых частиц с помощью величин, имеющих физический смысл, использовался для численного решения квантовых задач. Например, при численных расчетах рассеяния квантовых частиц оказалось более удобным использовать квазигидродинамическое представление [3]. Однако численные расчеты не могут дать представления о возможностях квазигидродинамического представления для описания инфинитного движения квантовых частиц. Нам удалось найти ряд аналитических решений известных квантовых задач и понять, что описание инфинитного движения квантовых частиц с помощью волны плотности вероятности является менее противоречивым и более адекватным по сравнению с описанием с помощью волновой функции. И главное, квазигидродинамический подход позволяет предсказать ряд новых эффектов, которые поновому объясняют известные прежние экспериментальные результаты и которые позволяют получить новые экспериментальные доказательства [5].

В исходной системе уравнений (1) и (2) введем макроскопическую скорость $\vec{v}$ из определения макроскопического импульса $\vec{P} = m\vec{v}$, тогда уравнение неразрывности в соответствии с формулой (1) можно записать в виде:

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t} + div\rho\vec{v} = 0 \quad (5)$$

В этом случае уравнение неразрывности принимает стандартный вид и обычно называется дифференциальным законом сохранения плотности вероятности. Уравнение (2) при переходе от макроскопического импульса к макроскопической скорости запишется в виде:

$$m\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} = -\nabla\left(\frac{mV^2}{2} + W(r,t) + \frac{\hbar^2(\nabla\rho)^2}{8m\rho^2} - \frac{\hbar^2\Delta\rho}{4m\varrho}\right) \quad (6)$$

Для свободных частиц, когда $W(r,t) = 0$ и $\vec{V} = const$, уравнение (6) имеет тривиальное решение $\rho = const$, которое соответствует волнам де Бройля и которое ранее использовалось для описания квантовой бесстолкновительной плазмы [6]. Однако система уравнений (5) и (6) помимо тривиального решения имеет и другие решения, что увеличивает предсказательные возможности квазигидродинамического представления для движения квантовых частиц.

[1] Национальный исследовательский университет МИЭТ, д.ф.-м.н., *vkn@miee.ru*

Умножим уравнение (6) на $2m$ и устремим $m \to 0$, получим

$$\nabla(\frac{\hbar^2(\nabla\rho)^2}{4\varrho^2} - \frac{\hbar^2\Delta\varrho}{2\varrho}) = 0 \tag{7}$$

Первое интегрирование этого уравнения дает:

$$(\delta\vec{P})^2 = (\frac{\hbar^2(\nabla\rho)^2}{4\varrho^2} - \frac{\hbar^2\Delta\varrho}{2\varrho}) = const \tag{8}$$

Здесь принято обозначение константы интегрирования для движения безмассовых частиц в виде квадрата квантового импульса [7]. В качестве решения системы уравнений (5) и (8) можно воспользоваться готовым решением из [7] в виде:

$$\varrho(\vec{r},t) = \varrho_0 \cos^2(\frac{\delta\vec{p}(\vec{r} - t\vec{v})}{\hbar}) \tag{9}$$

Это решение описывает волну плотности вероятности, которая распространяется в пространстве с волновым вектором $\vec{k}$:

$$\delta\vec{p} = \hbar\vec{k} \tag{10}$$

А закон дисперсии для частоты колебаний в этой волне запишется в виде:

$$\omega = \vec{k}\vec{v} = kv \tag{11}$$

Поскольку не существует макроскопический импульс $\vec{P}(\vec{r},t)$, который связан с массой частицы, то векторы $\vec{k}$ и $\vec{v}$ совпадают по направлению. Для энергии квантов этого поля имеем линейный закон дисперсии:

$$E = \hbar\cdot\omega = \hbar\cdot k\cdot v \tag{12}$$

Здесь скорость безмассовых квантовых частиц не определена. Это могут формально быть, например, длинноволновые акустические фононы, или фотоны, распространяющиеся со скоростью света, когда $v = c$. Здесь не требуется лоренц-инвариантность исходных уравнений, поскольку масса покоя фотонов равна нулю.

Если частица движется со скоростью света $v = c$, то имеем:

$$\delta p = \frac{\hbar\omega}{c} = \hbar k \tag{13}$$

Это есть стандартное выражение для импульса фотона. Пользуясь формулами (10) и (11) выражение для плотности вероятности (9) можно переписать в виде:

$$\varrho(\vec{r},t) = \varrho_0\cos^2(\vec{k}\vec{r} - \omega t) \tag{14}$$

Плотность электромагнитной энергии в вакууме для плоских электромагнитных волн равна [8]

$$\rho_e = \frac{E_0^2}{4\pi}\cos^2(\vec{k}\vec{r} - \omega t) \tag{15}$$

где E_0 - амплитуда электрического поля. Можно видеть, что плотность вероятности, описывающая движение частиц с нулевой массой, согласуется с плотностью электромагнитной энергии с точностью до нормировки. Тогда плотность потока вероятности

$$\vec{S} = \vec{v}\varrho(\vec{r},t)$$

согласуется с точностью до коэффициента с плотностью потока электромагнитной энергии (вектор Умова-Пойтинга).

I. Заключение

Полученные результаты ещё раз убеждают, что квазигидродинамическое представление или представление плотности вероятности, на наш взгляд, более полно описывают волновую природу движения квантовых частиц.

Эта статья была написана к 120-летию со дня рождения Луи де Бройля (15.08.1892 г.), к которому автор на протяжении своей жизни питает все возрастающий пиетет, и опубликована в [7]. С течением времени содержание статьи по необходимости изменилось. Здесь изложен её новый вариант.

Список литературы

[1] Де Бройль Луи. *Избранные научные труды. Т.1. Становление квантовой механики.* Логос, Москва, 2010. 552 с.

[2] Deb B.M. Ghosh S.K. Densities, density-functionals and electron fluids. *Physics Reports (Review Section of Physics Letters)*, 92(1):1–44, 1982.

[3] Абакумов А.И. Алексеев Б.В. Об одном подходе к решению уравнения Шредингера. *Доклады Академии наук*, 262:1100–1102, 1982.

[4] *Вопросы причинности в квантовой механике. Сб. переводов / Под ред. Я.П. Терлецкого и А.А. Гусева.* ИЛ, Москва, 1955. С.34.

[5] Петухов В.А. Чаплыгин Ю.А., Неволин В.К. Эффект охлаждения анода при автоэлектронной эмиссии с катода. *Доклады Академии наук*, 436(2):1–3, 2011.

[6] Рухадзе А.А. Кузелев М.В. О квантовом описании линейных кинетических свойств бесстолкновительной плазмы. *УФН*, 169(6):687–689, 1999.

[7] Неволин В.К. *Квантовый транспорт в устройствах электроники.* Техносфера, Москва, 2012. 89 с.

[8] Власов А.А. *Макроскопическая электродинамика.* ГизТТЛ, Москва, 1955. С. 48.