Журнал Формирующихся Направлений Науки
номер , стр. 121-130, 2014

статья получена: 12.08.2014
статья принята к публикации: 04.11.2014
http://www.unconv-science.org/n6/jadczyk

Комментарии к Главе 5 “Теории физического вакуума” Г.И. Шипова. Часть 1.

Аркадиуш Ядчик (Arkadiusz Jadczyk) [1] [2]

***Аннотация*—В работе обсуждаются математические проблемы и внутренние противоречия в гл. 5 монографии “Теория физического вакуума” Г.И. Шипова. Отдельное внимание уделено секциям 5.4 и 5.5, где неправильно используется формализм подвижного репера и дифференциальных форм Картана для рассмотрения пространства-времени геометрии абсолютного параллелизма с кручением. Указывается на схожие или те же самые проблемы в других публикациях того же автора. Перечислены найденные математические противоречия, и указан правильный путь решения предмета обсуждения.**

***Index Terms*—кручение, абсолютный параллелизм, метод Картана, телепараллельная геометрия**

I. Введение

Объектом этих комментариев является часть Главы 5 монографии Г.И. Шипова “Теория физического вакуума” [1]. Я буду ссылаться на этот текст как “Книга” и на автора как “Автор”. Концентрируясь на книге, я иногда буду комментировать другие работы Автора, содержащие части, почти идентичные соответствующим частям книги. Проблемы, найденные в трактовке движения спина в телепараллельной геометрии с кручением, будут рассмотрены в будущем, в Части 2 данной серии статей.

Написание критического обзора чьей-либо работы – большая ответственность. При указании замечаний и ошибок я не хотел сам сделать ошибок. По этим причинам я спросил Ф.В. Хеля, вместе с которым мы писали другую критическую работу по торсионным теориям [2], не захочет ли он помочь мне советом в этой задаче. Его ответ был доброжелательным, хотя и содержал утверждение, что он потерял достаточно времени с Майроном Эвансом - [2], и он не хочет теперь терять время с Шиповым. Затем он меня спросил, действительно ли я думаю, что это стоит того, чтобы на это смотреть. Я обратился с тем же самым к другому своему коллеге, с которым я писал монографию по римановой геометрии [3]. Он ответил, что, хотя он любит кручение, существует много книг с кучей ошибок, почему же я хочу потратить время именно на эту? Я ответил: “Меня интересует этот предмет, и я хочу знать правду”.

Это и есть основная причина для этих заметок, в которых я указываю на те ошибки в книге, которые я заметил. Да, их много; некоторые можно легко исправить, некоторые, похоже, серьёзны; хотя было бы неверным обобщить и сделать вывод из множества ошибок в одной части, что всё остальное в этой книге также должно быть неверно. Например: вторая редакция знаменитой монографии Кобаяши и Номидзу по дифференциальной геометрии [4] содержит две страницы найденных опечаток. Несмотря на это, она всё ещё содержит ошибки, хотя это действительно хорошая книга. Составной том другой прекрасной монографии “Анализ, многообразия и физика” Y. Choquet-Bruhat и C. DeWitt-Morette [5] имеет десять страниц найденных опечаток к Части I; целые теоремы, вместе с их доказательством, необходимо было заменить.

“*Человеку свойственно ошибаться, но глупо упорствовать в своих ошибках*[3].” Главное – суметь исправить ошибки, которые могут быть исправлены, признать и перестать распространять те, которые нельзя исправить, и на ошибках учиться.

II. Обозначения и терминология

Я предполагаю, что читатель знаком с основными концепциями дифференциальной геометрии, в частности *с теорией связности на векторных расслоениях*. Это знание, фактически, предполагается в математической части всех публикацией по *“торсионным полям”*. Обширное рассмотрение соответсвующих математических концепций может быть найдено в исчерпывающем обзоре Эгучи, Гилки и Хэнсона [6]. Если необходимо, в ссылках [4], [7]–[15] может быть найдена дополнительная информация.[4]

Сравнивая различные источники, мы будем часто обнаруживать, что авторы могут использовать разные конвенции по именованию и обозначению тех же самых величин, поэтому необходима осторожность. Книга сама вводит собственные конвенции по именованию и

[1] *Quantum Future Group, Inc., kairos@quantumfuture.net.*
[2] *Перевод В.А. Жигалова.*

[3] Приписывается римскому философу-стоику Луцию Аннею Сенеке.

[4] Насколько возможно, я даю английские и русские версии.

обозначению, что делает задачу анализа содержимого ещё сложнее. Чтобы облегчить сравнение содержимого книги со стандартными текстами, *я буду использовать нотацию и соглашения Шипова*, и связывать их с теми, которые могут быть найдены в литературе по тому же предмету.

Иногда я буду ссылаться на оригинальные формулы из книги. В этих случаях с буду использовать двойные скобки, например, ((5.88)) для номера формулы в оригинале.

A. *Аффинная связность*

Основным объектом исследования является четырёхмерное пространственно-временное многообразие, снабжённое параллельным переносом, определённым аффинной связностью и ассоциированной ковариантной производной, обозначаемой как $\overset{\star}{\nabla}$. Везде принимается эйнштейновское соглашение по суммированию. Латинские индексы $a, b, c, ...$ будут нумеровать векторные поля и формы ("неголономные координаты"), индексы $i, j, k, ...$ относятся к системе координат ("голономные координаты").

В координатной системе x^i, $(i = 0, ..., 3)$ коэффициенты связности Δ^k_{ij} определены как

$$\overset{\star}{\nabla}_j \partial_i = \Delta^k_{ij}\, \partial_k, \tag{II.1}$$

где $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ векторные поля, касательные к координатным линиям.

В литературе можно встретить два противоположных соглашения по индексированию коэффициентов связности. В то время как в [10, p. 59 (en), p. 66 (ru)], [12, p. 257], [15, p. 261 (en), p. 260 (ru)], [16, p. 256 (en),p. 262 (ru)] мы находим то же соглашение, что и выше, противоположное соглашение, с переставленными индексами i, j, используются в [6, p. 278], [7, p. 113], [8, p. 148 (eng), p. 182 (ru)], [4, p. 141 (en), p. 140 (ru)], [9, p. 182 (ru)], [11, p. 271], [13, p. 243], [14, p. 210], [3, p. 9] [17, p. 354 (en), p. 377 (ru)], [18, p. 169].

B. *Кручение*

Наша связность допускает *кручение*. Обычно тензор кручения обозначается буквой T, однако в Книге символ T зарезервирован для другого (см. ниже), поэтому я буду обозначать тензор кручения прописной буквой $\mathscr{T}$. Тензор кручения *любой* аффинной связности определён как (см. [4, p. 133 (en), p. 131 (ru)])

$$\mathscr{T}(X, Y) = \nabla_x Y - \nabla_Y X - [X, Y]. \tag{II.2}$$

Принимая $X = \partial_i$, $Y = \partial_j$, с $[\partial_i, \partial_j] = 0$, мы получаем локальное выражение для коэффициентов кручения $\mathscr{T}^k_{ij}$ в терминах коэффициентов связности Δ^k_{ij}

$$\mathscr{T}^k_{ij} = \Delta^k_{ji} - \Delta^k_{ij}. \tag{II.3}$$

Сравнивая выражение с формулой ((5.20)) в Книге, мы видим, что то, что называется кручением в Книге, и обозначается большой греческой буквой Ω - это только половина обычного кручения:

$$\Omega_{ij}^{\cdot\cdot k} = \frac{1}{2}\mathscr{T}^k_{ij},\ \mathscr{T}^k_{ij} = 2\Omega_{ij}^{\cdot\cdot k}. \tag{II.4}$$

C. *Кривизна*

Кривизна (я буду следовать обозначению Книги и обозначать тензор кривизны большой буквой S) *любой* связности ∇ определена как (см. [4, p. 133 (en), p. 131 (ru)])

$$S(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z. \tag{II.5}$$

Принимая $X = \partial_i, Y = \partial_j, Z = \partial_k$, мы получаем следующее выражение для коэффициентов тензора кривизны:

$$S^i{}_{jkm} = \Delta^i_{jm,k} - \Delta^i_{jk,m} + \Delta^i_{sk}\Delta^s_{jm} - \Delta^i_{sm}\Delta^s_{jk}, \tag{II.6}$$

где запятая $,k$ обозначает частную производную по отношению к координате x^k. Это уравнение ((5.53)) в Книге, и оно такое же в стандартных текстах, например, в [7, p. 117].

D. *Конторсия*

В телепараллельной теории, подобно той, что обсуждается в Книге, пространственно-временное многообразие снабжено не только аффинной связностью, но также псевдо-римановым метрическим тензором g_{ij}, который сохраняется при параллельном переносе. Таким образом, мы имеем

$$\overset{\star}{\nabla}_k g_{ij} = 0. \tag{II.7}$$

Метрика, с другой стороны, порождает свободную от кручения связность Леви-Чивиты. В Книге ковариантная производная связности Леви-Чивиты обозначается как ∇, и далее я сохраню это обозначение. Коэффициенты связности ∇, обычно обозначаемые как $\left\{ {i \atop jk} \right\}$, обозначены как Γ^i_{jk}. Я также сохраню это обозначение. Таким образом, из самого определения мы имеем

$$\nabla_j \partial_k = \Gamma^i_{kj}\, \partial_i. \tag{II.8}$$

Связность Леви-Чивиты имеет нулевое кручение, её коэффициенты связности симметричны:

$$\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}. \tag{II.9}$$

Разность любых двух аффинных связностей является тензором. Разность между $\overset{\star}{\nabla}$ и ∇ называется *конторсией*, и в Книге она обозначается символом T :[5]

$$\Delta^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + T^i_{jk}. \tag{(5.28)}$$

[5]Конторсия, или *дефект*, может быть выражена в терминах кручения, а кручение в терминах конторсии, см. например, [19]–[21]

III. Ошибка в формуле для второго тождества Бьянки

Свободная от индексов формулировка второго тождества Бьянки, справедливого для любой аффинной связности, может быть найдена, например, в [4, p. 135, Theorem 5.3 (en), p. 132 (ru)] и [17, p. 360, Eq. (5.22) (en), p. 383 (ru)]. Оно выражается как

$$\mathfrak{S}(R(X,Y)Z) = \mathfrak{S}\{\mathscr{T}(\mathscr{T}(X,Y),Z) + (\nabla_X \mathscr{T})(Y,Z)\}, \tag{III.1}$$

где $\mathfrak{S}$ обозначает циклическую сумму по отношению к X, Y и Z. Это тождество легко выразить в координатном базисе в терминах тензоров кручения и кривизны. Зуланке [9, p. 189, Eq. (62)] даёт следующее обобщение в явном виде (я переименовал индексы, чтобы легче было сравнить с формулами, данными в Книге):

$$\nabla_{[k}\mathscr{T}^i_{jm]} - \mathscr{T}^s_{[kj}\mathscr{T}^i_{m]s} = R^i{}_{kjm}, \tag{III.2}$$

где квадратные скобки представляют антисимметризование – также как символ $\mathfrak{S}$ в Кобаяши, на этот раз применённое к индексам в скобках. Формула (III.1), после развертки, приводит к тому же результату. Действительно, установив

$$X = \partial_j, Y = \partial_m, Z = \partial_k, \tag{III.3}$$

мы получаем для левой части уравнения

$$\mathrm{LHS} = \mathfrak{S}\{R(\partial_j,\partial_m)\partial_k\} = \mathfrak{S}\{R^i{}_{kjm}\}\partial_i, \tag{III.4}$$

а для правой части мы получаем

$$\begin{aligned}\mathrm{RHS} &= \mathfrak{S}\{\mathscr{T}(\mathscr{T}(\partial_j,\partial_m),\partial_k) + (\nabla_j\mathscr{T})(\partial_m,\partial_k)\}\\ &= \mathfrak{S}\{\mathscr{T}(\mathscr{T}^s_{jm}\partial_s,\partial_k) + \nabla_j\mathscr{T}^i_{mk}\partial_i\}\\ &= \mathfrak{S}\{\mathscr{T}^s_{jm}\mathscr{T}^i_{sk}\partial_i + \nabla_j\mathscr{T}^i_{mk}\partial_i\}\\ &= \mathfrak{S}\{\nabla_j\mathscr{T}^i_{mk} - \mathscr{T}^s_{jm}\mathscr{T}^i_{ks}\}\partial_i.\end{aligned} \tag{III.5}$$

Знак "минус" появляется в последней строке после того, как мы переупорядочили индексы k, s в антисимметричном тензоре кручения $\mathscr{T}^i_{ks}$, чтобы переставленные индексы j, m, k были вместе.

Чтобы абсолютно убедиться, что мы имеем хорошую формулу[6], давайте проверим другой классический текст, старое доброе *"Исчисление Риччи"* Схоутена [18], цитируемое в Книге. Из-за разницы в соглашениях мы сначала убедимся, что мы имеем правильное отображение из Схоутена в Книгу. Схоутен пишет ковариантные производные векторного поля как (см. [18, p. 124, Eq. (2.3)]:

$$\nabla_\mu v^\kappa = \partial_\mu v^\kappa + \Gamma^\kappa_{\mu\lambda}\, v^\lambda. \tag{III.6}$$

В Книге мы находим:

$$\overset{\star}{\nabla}_k U^i = U^i_{,k} + \Delta^i_{jk}U^j. \tag{(5.21)}$$

[6]Фактически, чтобы быть *абсолютно* уверенным, надо самому вывести формулу, и затем проверить численно на случайно сгенерированном наборе чисел, что сегодня с компьютерами вовсе не сложно. Я это проделал.

Адаптируя индексы и сравнив, мы находим что

$$\Delta^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}, \tag{III.7}$$

где левая часть уравнения – коэффициенты связности, используемые в Книге, правая часть - коэффициенты связности, используемые Схоутеном. Затем мы сравниваем определение кручения. Схоутен использует букву S для его кручения. Он определяет его как [18, p. 126, Eq. (2.13)]

$$S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\kappa} = \Gamma^\kappa_{[\mu\lambda]}, \tag{III.8}$$

где символ антисимметрирования используется точно так же, как и в Книге, таким образом

$$\Gamma^\kappa_{[\mu\lambda]} = \frac{1}{2}(\Gamma^\kappa_{\mu\lambda} - \Gamma^\kappa_{\lambda\mu}). \tag{III.9}$$

Книга определяет кручение Ω как

$$\Delta^k_{[ij]} = -\Omega_{ij}^{\cdot\cdot k}. \tag{(5.20)}$$

Поскольку $\Omega_{ij}^{\cdot\cdot k} = -\Omega_{ji}^{\cdot\cdot k}$, мы имеем

$$\Omega_{ji}^{\cdot\cdot k} = \Delta^k_{[ij]} = \Gamma^k_{[ji]} = S_{ji}^{\cdot\cdot k}, \tag{III.10}$$

Поэтому *кручение Ω в книге идентично кручению S у Схоутена.* Схоутен доказывает второе тождество Бьянки в следующей форме [18, p. 144, Eq. (5.2)]

$$R_{[\nu\mu\lambda]}^{\cdot\cdot\cdot\kappa} = 2\nabla_{[\nu}S_{\mu\lambda]}^{\cdot\cdot\kappa} - 4S_{[\nu\mu}^{\cdot\cdot\rho}S_{\lambda]\rho}^{\cdot\cdot\kappa}. \tag{III.11}$$

Приняв $\kappa \to i, \nu \to k, \mu \to j, \lambda \to m, \rho \to s, R = 0, S \to \Omega, \nabla \to \overset{\star}{\nabla}$, мы опять приходим к

$$\overset{\star}{\nabla}_{[k}\,\Omega_{jm]}^{\cdot\cdot i} - 2\,\Omega_{[kj}^{\cdot\cdot s}\,\Omega_{m]s}^{\cdot\cdot i} = 0. \tag{III.12}$$

Чтобы сравнить тождество Бьянки с формулой из Книги, нам следует всегда ставить $R = 0$, т.к. это основное предположение в Книге, которое описывает телепараллельный случай, с тождественно нулевой кривизной. Формула (5.60) в Утверждении 5.6 в Книге читается:

$$\overset{\star}{\nabla}_{[k}\Omega_{jm]}^{\cdot\cdot i} + 2\Omega_{[kj}^{\cdot\cdot s}\Omega_{m]s}^{\cdot\cdot i} = 0. \tag{(5.60)}$$

Используя уравнение (II.4) мы видим, что знак в формуле неверный. Невозможно проследить точное происхождение этого неверного знака, т.к. доказательство формулы в Утверждении 5.6 неполно.

A. Зачем беспокоиться?

Читатель может спросить, почему я уделяю так много внимания ошибке в формуле? Действительно, я мог бы, вероятно, уделить намного меньше внимания, если бы не факт, что та же самая ошибка повторяется в других публикациях. Проверив случайным образом, я нашёл ту же ошибку в формуле в [22, Eq. (1.60)], [23, Eq. (60)], [24, Eq. (31)], [25, Eq. (33)]. Конечно, можно спросить – может быть, знак не имеет значения? Но если знак в математической формуле не имеет значения, тогда не имеет значения формула. И раз так, тогда зачем её писать вообще?

IV. Ошибки в трактовке дифференциальных форм и неголономной системы отсчёта

Разделы Книги 5.4 и 5.5 сложно анализировать, т.к. они содержат внутренние *математические противоречия.* Заголовки этих разделов: *Формализм внешних форм и матричная форма структурных уравнений Картана геометрии абсолютного параллелизма*, и *Геометрия A_4 как групповое многообразие. Метрика Киллинга-Картана.* Похоже, что внутренние противоречия в этих двух разделах следуют из факта, что коэффициенты связности в неголономной системе отсчёта определены не тем способом, как это делается в дифференциальной геометрии. Здесь я объясню, в чём проблема с этими двумя разделами, я укажу на противоречия, которые надо разрешить, чтобы содержание этих разделов приобрело какой-то математический смысл. Я также объясню проблемы в некоторых деталях в надежде, что это может помочь автору исправить эти проблемы в будущем.

Метод анализа аффинной связности в неголономной тетраде описан, например, в *“Исчислении Риччи”* Схоутена [18], Гл. III,§9, *Линейные связности, выраженные в неголономных координатах,* Гл. III,§10, *Символьный метод Картана, используемый для связностей.* Я сначала опишу метод, адаптируя обозначения и терминологию [18] к применяемой в Книге.

Неголономные координаты в пространственно-временном многообразии состоят из четырёх линейно независимых векторных полей e_a, $(a = 0, ..., 3)$ которые могут быть выражены как линейные комбинации векторных полей ∂_i, касательных к координатным прямым (голономной) системы координат x^i:

$$e_a = e_a^i\,\partial_i. \tag{IV.1}$$

Тогда существует ещё дуальный корепер (тетрада) e^a дифференциальных форм[7]

$$e^a = e^a_i\,dx^i. \tag{IV.2}$$

Дуальность выражена отношениями:

$$e^i_a e^b_i = \delta^b_a, \quad e^i_a e^a_j = \delta^i_j. \tag{IV.3}$$

Любое векторное поле v может быть выражено в терминах либо голономного базиса ∂_i либо неголономного базиса e_a:

$$v = v^i\,\partial_i = v^a\,e_a, \tag{IV.4}$$

с

$$v^a = e^a_i v^i, \quad v^i = e^i_a\,v^a. \tag{IV.5}$$

Точно так же для любой дифференциальной формы w

$$w = w_i\,dx^i = w_a\,e^a, \tag{IV.6}$$

$$w_a = e^i_a\,w_i, \quad w_i = e^a_i\,w_a. \tag{IV.7}$$

[7]В Книге, по неизвестным причинам, терминология обратна: e_a называются *ковекторами*, а e^a называются *векторами.*

Для *любой* аффинной связности ∇ коэффициенты связности Γ^a_{bc} по отношению к неголономным координатам определяются формулой

$$\nabla_c\,e_b = \Gamma^a_{bc}\,e_a, \tag{IV.8}$$

где

$$\nabla_c = \nabla_{e^i_c\partial_i} = e^i_c\nabla_i. \tag{IV.9}$$

Можно также использовать коэффициенты связности Γ^a_{bi}, определённые как

$$\nabla_i\,e_b = \Gamma^a_{bi}\,e_a, \tag{IV.10}$$

с

$$\Gamma^a_{bc} = e^i_c\,\Gamma^a_{bi}, \quad \Gamma^a_{bi} = e^c_i\,\Gamma^a_{bc}. \tag{IV.11}$$

Таким образом, задавая фиксированную неголономную систему отсчёта, мы имеем формы связности

$$\Gamma^a_b = \Gamma^a_{bc}\,e^c = \Gamma^a_{bi}\,dx^i. \tag{IV.12}$$

Из определения (IV.8) мы выводим формулу для ковариантной производной векторного поля v, выраженной в неголономных координатах:

$$\begin{aligned}(\nabla_a v)^b &= (\nabla_a v^c\,e_c)^b = \partial_a v^c\,(e_c)^b + v^c\,\Gamma^b_{ca}\\ &= \partial_a\,v^b + \Gamma^b_{ca}\,v^c,\end{aligned} \tag{IV.13}$$

где (IV.8) и (IV.13) эквивалентны. Это формула (9.1) в [18, p. 169].

Из определения коэффициентов связности мы можем найти отношение между голономными и неголономными коэффициентами как

$$\nabla_i\,e_a = \Gamma^b_{ai}\,e_b, \tag{IV.14}$$

$$\nabla_i\,e_a = \nabla_i\,(e^j_a\,\partial_j) \tag{IV.15}$$

$$= e^j_{a,i}\,\partial_j + e^k_a\,\Gamma^j_{ki}\,\partial_j \tag{IV.16}$$

$$= (e^j_{a,i} + e^k_a\,\Gamma^j_{ki})\,e^b_j\,e_b. \tag{IV.17}$$

Поэтому

$$\Gamma^b_{ai} = e^b_j\,e^j_{a,i} + e^k_a\,e^b_j\,\Gamma^j_{ki} = -e^j_a\,e^b_{j,i} + e^k_a\,e^b_j\,\Gamma^j_{ki}. \tag{IV.18}$$

Это, по существу, уравнение (9.2) в Схоутене [18, p. 169]. Записывая в терминах дифференциальных форм и переименовав индексы, формула выше будет

$$\Gamma^a_b = e^a_i\,d\,e^i_b + e^k_b\,e^a_l\Gamma^l_k. \tag{IV.19}$$

Сказанное выше объясняет, как коэффициенты связности в неголономных координатах рассматриваются в дифференциальной геометрии.[8] Я ссылаюсь здесь только на [18], но то же может быть найдено в любом тексте по этой теме, например [26, p. 466, Eq. (3.3), second line], [27, p. 102, Eq. (7.1) (en), p. 150 (ru)], [10, p. 59, Eq. (38.4) (en), p. 66 (ru)].

[8]Всё это может быть переведено на язык главных связностей на расслоении линейных реперов (или их редукции до расслоения ортогональных реперов), что является современным способом обсуждения формализма Картана; но такая формулировка не добавляет здесь ничего действительно важного. Я пытаюсь рассуждать почти на примитивном уровне, часто используемом физиками и пригодном для их целей.

После этих вводных комментариев давайте вернёмся к содержимому разделов 5.4 и 5.5 Книги. По непонятным причинам коэффициенты связности $\Delta^a{}_b$ определены там не так, как в стандартных текстах дифференциальной геометрии, как дано в (IV.18), (IV.19). Они определены, используя *только первую часть полной формулы* (IV.18), (IV.19):

$$\Delta^a{}_b = e^a_i\, d\, e^i_b, \qquad ((5.65))$$

т.е.: $\Delta^a_{bj} = e^a_i\, e^i_{b,j}$. И *это, вероятно, одна из основных причин, по которым содержимое этих двух разделов запутано и противоречиво*, как я объясню теперь.[9]

A. Ошибка в определении геометрии абсолютного параллелизма

Первое странное утверждение, которое мы встречаем в разделе 5.4 Книги, звучит так:

> *По определению, пространство имеет геометрию абсолютного параллелизма, если 2-форма кручения Картана S^a и 2-форма кривизны Римана-Кристоффеля $S^b{}_a$ пространства равны нулю*

$$S^a = 0, \qquad ((5.71))$$

$$S^b{}_a = 0. \qquad ((5.72))$$

Одним из основных источников в Книге является (немного устаревшая книга) [26]. Там, внизу стр. 485 (ru) мы находим утверждение, которое является стандартным в дифференциальной геометрии:

> *Если $r = n$, [т.е. если число параллельных векторных полей равно числу измерений многообразия] тогда $R^k_{hlm} = 0$ и пространство имеет нулевую кривизну. Говорят, что такое пространство является пространством абсолютного параллелизма.*

Утверждать, что кручение также равно нулю, как это утверждается в Книге, по крайней мере, странно. Путаница, вероятно, происходит из "оригинального" определения коэффициентов связности, как я объяснил выше. Простое копирование стандартного определения кручения в терминах коэффициентов связности, и использование его с другим определением этих коэффициентов, естественно, ведёт к путанице.

Remark 4.1: Несмотря на странное определение коэффициентов связности, будет полезно иметь некоторую геометрическую интерпретацию $\Delta^a{}_b$. Фактически, надо просто посмотреть на формулу (IV.18) и заметить то, что было пропущено в определении $\Delta^a{}_b$, а именно Γ^j_{ki} было приравнено нулю. Следовательно, $\Delta^a{}_b$ может быть интерпретировано как настоящие коэффициенты связности (в подвижной тетраде e^a) единственной связности, которая имеет нулевые коэффициенты связности в системе координат ∂_i. В [12, p. 318, Example 1] такая связность называется *стандартной* (в координатной системе x^i) и обозначается как δ.

[9] Конечно, мы можем определить величины, по каким-то причинам, так, как мы захотим. Но тогда не надо удивляться, что свойства и формулы, используемые в литературе для величин, определённых иначе, не будут автоматически применимы.

B. Ошибка в правилах преобразования конторсии

Давайте переместимся к ещё одному источнику путаницы, определению "коэффициентов конторсии" $T^a{}_b$, и коэффициентов связности Леви-Чивиты $\Gamma^a{}_b$, основные анализируемые объекты в двух разделах. Цитируя Книгу:

> *Учитывая (5.28), мы представим 1-форму $\Delta^a{}_b$ как сумму*

$$\Delta^a{}_b = \Gamma^a{}_b + T^a{}_b. \qquad ((5.77))$$

В то время как левая часть этого уравнения определена (хотя и нестандартным путём), в правой части мы имеем два неопределённых объекта: $\Gamma^a{}_b$ и $T^a{}_b$. Поскольку они не определены, мы можем лишь попытаться предположить, какой смысл они имееют, и проанализировать следующие формулы, чтобы проверить, верно ли наше предположение. К счастью, мы можем найти формулу для T четырьмя страницами позже, где оно определено как

$$T^a{}_{bk} = e^a_i\, e^j_b\, T^i_{jk} = e^j_b\, \nabla_k\, e^a_j, \qquad ((5.113))$$

где ∇ обозначает связность Леви-Чивиты, и уравнение работает в предположении, что $\overset{\star}{\nabla} e_a = 0$. Первое уравнение естественно. Конторсия, как разность двух связностей – тензорный объект, и первое уравнение – корректный способ выразить его в неголономных координатах. Второе уравнение работает только для параллельных координат. В то же время есть вторая формула, а именно

$$T^a{}_{bk} = e^j_b\, \nabla_k\, e^a_j \qquad ((5.113))$$

которая похоже используется в ((5.88)), что предполагает трансформационный характер T при калибровочных преобразованиях:

$$e^{a'}_m = \Lambda^{a'}_a\, e^a_m. \qquad ((5.87))$$

Уравнение ((5.88)) гласит:

$$T^{a'}_{b'k} = \Lambda^{a'}_a\, T^a_{bk}\, \Lambda^b_{b'} + \Lambda^{a'}_a\, \Lambda^a_{b',k}. \qquad ((5.88))$$

Смысл в том, что даже со странным определением ((5.113)), формула ((5.88)) неверна – у неё неверный знак. Проверка проста:

$$\begin{aligned} T^{a'}_{b'k} &= e^j_{b'} \nabla_k e^{a'}_j = \Lambda^b_{b'} e^j_b \nabla_k (\Lambda^{a'}_a e^a_j) \\ &= e^j_b e^a_j\, \Lambda^b_{b'} \Lambda^{a'}_{a,k} + e^j_b \Lambda^b_{b'} \Lambda^{a'}_a \nabla_k\, e^a_j \\ &= \Lambda^a_{b'} \Lambda^{a'}_{a,k} + \Lambda^{a'}_a \Lambda^b_{b'} T^a_{bk} \\ &= \Lambda^{a'}_a\, T^a_{bk}\, \Lambda^b_{b'} - \Lambda^{a'}_a\, \Lambda^a_{b',k}, \end{aligned} \qquad (IV.20)$$

где мы использовали $\Lambda^a_{b'} \Lambda^{a'}_{a,k} = -\Lambda^{a'}_a\, \Lambda^a_{b',k}$, поскольку $\Lambda^a_{b'} \Lambda^{a'}_a = \delta^{a'}_{b'}$. Таким образом, в уравнении ((5.88)) знак должен быть "минус" вместо "плюса". Я заметил ту же ошибку, иногда с различными названиями индексов, в [22, p. 27, Eq. (1.88)], [23, Eq. (88)], [28, Eq. 18], [24, Eq. (33)].

V. Ошибки в использовании метода Картана

Неверный знак в уравнении ((5.88)) – не такая большая беда. Поскольку формула скорее всего никогда не будет использована, это не будет иметь серьёзных последствий. Но сейчас я подхожу к более серьёзной проблеме. Всё начинается с определения ((5.65)) для $\Delta^a{}_b$. Как я уже говорил, коэффициенты связности в подвижном репере вводятся в дифференциальной геометрии иначе. Хотя каждый может определить величины, как он/она пожелает, за эту свободу приходится платить. Как я сейчас покажу, в данном случае, цена оказывается довольно высокой.

Наверное, лучший способ продемонстрировать ошибки в математических утверждениях – это привести простые, но убедительные контрпримеры. Я приведу два таких контрпримера, и я покажу, что вся идея обращения с дифференциальными формами и неголономными координатами, применяемая в разделах 5.4 и 5.5 Книги, неверна с самого начала[10]. В частности, *с определениями, данными так, как в Книге*, формулы "Структурных уравнений Картана и тождеств Бьянки для геометрии A_4", записанные в рамке на стр. 23 Книги как:

$$\boxed{\begin{array}{rcll} de - e\wedge T &=& 0, & ((A)) \\ R + dT - T\wedge T &=& 0, & ((B)) \\ R\wedge e\wedge e\wedge e &=& 0, & ((C)) \\ dR + R\wedge T - T\wedge R &=& 0. & ((D)) \end{array}} \qquad (V.1)$$

- все они *ошибочны*.

A. Контрпример 1: *"связность навигатора"*

В качестве первого контрпримера давайте возьмём один из простейших и старейших примеров реализаций телепараллелизма, данный как упражнение в классическом тексте Схоутена [18, p. 143, Exercise III.4,1].[11] Упражнение, математическая игрушечная модель, сформулирована там так – см. рис. 1:

> "Человек движется по поверхности земли, всегда смотря в одну определённую точку, скажем, Иерусалим или Мекку или Северный полюс. Докажите, что это перемещение полу-симметрично, метрично, и вычислите S_λ."

Накахара [14, p. 216-219] обсуждает этот пример в некоторых деталях в разделе 7.3.2, озаглавленном "*Геометрический смысл тензора Римана и тензора кручения*", Пример 7.11, вычисляя кручение. Fernández и W. A. Rodrigues вычисляют даже больше в Приложении B [29]: "*Связность Леви-Чивиты и Нунса на* $\overset{\circ}{S}{}^2$". Связность автопараллельной геометрии, названная в [29] *навигатором* или связностью *Нунса*,

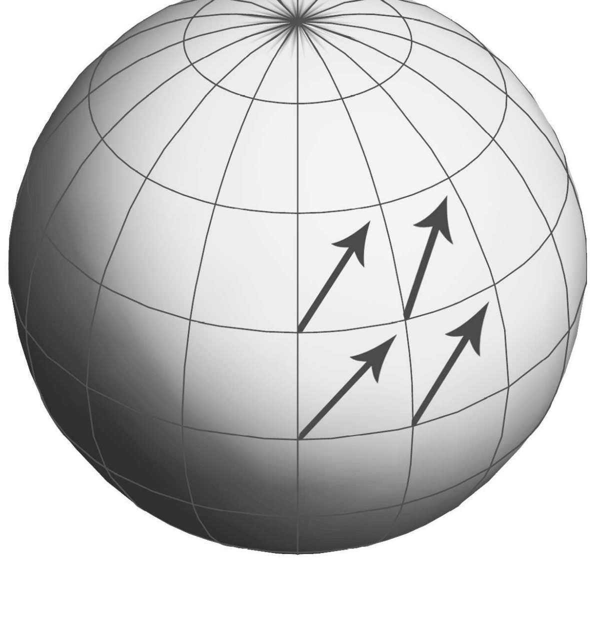

Рис. 1. Связность навигатора: параллелизм, определенный на карте Меркатора.

определена так [14]: Предположим, мы движемся по поверхности Земли. Мы *определяем* вектор, который параллельно переносится, если угол между вектором и широтой остаётся фиксированным во время движения. Давайте сначала определим голономные координаты, репер, корепер и метрику.

Координаты $(x^1, x^2) = (\theta, \phi)$, $0 < \theta < \pi), 0 < \phi < 2\pi)$. Голономный базис: ∂_i. Подвижная система координат

$$e_1 = \partial_1,\, e_2 = \frac{1}{\sin x^1}\,\partial_2, \qquad (V.2)$$

$$e_1{}^1 = 1,\, e_1{}^2 = 0,\, e_2{}^1 = 0,\, e_2{}^2 = \frac{1}{\sin x^1}. \qquad (V.3)$$

Корепер

$$e^1{}_1 = 1,\, e^1{}_2 = 0,\, e^2{}_1 = 0,\, e^2{}_2 = \sin x^1. \qquad (V.4)$$

1) Геометрические величины в координатном базисе: Метрика, соответствующая стандартной метрике на поверхности единичной сферы:

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 x^1 \end{bmatrix}, \quad [g^{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{sin^2 x^1} \end{bmatrix}. \qquad (V.5)$$

Ненулевые (голономные) коэффициенты римановой кривизны Γ^i_{jk}:

$$\Gamma^1_{22} = -\cos x^1 \sin x^1,\, \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \cot x^1. \qquad (V.6)$$

Ненулевые (голономные) коэффициенты римановой кривизны $R^i{}_{jkm}$:

$$\begin{aligned} &R^1{}_{212} = -R^1{}_{221} = \sin^2 x^1, \\ &R^2{}_{121} = -R^2{}_{112} = 1. \end{aligned} \qquad (V.7)$$

[10] Файлы Mathematica, содержащие вычисления для этих двух примеров, можно скачать: http://arkadiusz-jadczyk.org/Navigator.nb, http://arkadiusz-jadczyk.org/S3xR.nb

[11] Эта игрушечная модель нефизична, она двумерна. Как мы увидим во втором контрпримере, добавление ещё двух размерностей не меняет ничего важного в рассуждении.

Ненулевые (голономные) коэффициенты связности абсолютного параллелизма $\Delta^i{}_{jk}$:

$$\Delta^2{}_{21} = \cot x^1. \tag{V.8}$$

Ненулевое (голономное) кручение $\mathscr{T}^i{}_{jk} = \Delta^i_{kj} - \Delta^i_{jk}$:

$$\mathscr{T}^2{}_{12} = -\mathscr{T}^2{}_{21} = \cot x^1. \tag{V.9}$$

Ненулевая (голономная) конторсия $T^i{}_{jk}$:

$$T^1{}_{22} = \cos x^1 \sin x^1, \quad T^2{}_{12} = -\cot x^1. \tag{V.10}$$

2) $\Delta^a{}_b, \Gamma^a{}_b$ и $R^a{}_b$ в параллельной (неголономной) системе координат, вычисленной также, как в Книге (неправильный способ): Система координат неголономна. Мы имеем

$$[e_i, e_j] = c^k_{ij}\, e_k, \quad c^2_{21} = -c^2_{12} = \cot x^1. \tag{V.11}$$

Мы вычисляем $[\Delta^a{}_b]_i$ в соответствии с уравнением ((5.67)) Книги. Результатом будет

$$[\Delta]_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\cot x^1 \end{bmatrix}, \quad [\Delta]_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{V.12}$$

Затем мы вычисляем

$$[T^a{}_b]_i$$

из ((5.113)), и $\Gamma^a{}_b = \Delta^a{}_b - T^a{}_b$ из ((5.77)):

$$[T]_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [T]_2 = \begin{bmatrix} 0 & \cos x^1 \\ -\cos x^1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{V.13}$$

$$[\Gamma]_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\cot x^1 \end{bmatrix}, [\Gamma]_2 = \begin{bmatrix} 0 & \cos x^1 \\ -\cos x^1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{V.14}$$

Наконец, мы можем вычислить “тензор Римана” $R^a{}_{bij}$ из формулы ((5.78)). Ненулевыми компонентами являются

$$[R^a{}_b]_{12} = -[R^a{}_b]_{21} = \begin{bmatrix} 0 & -\cos 2x_1 \csc x_1 \\ -\csc x_1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{V.15}$$

Что здесь неверно? Наши матрицы должны быть в алгебре Ли $so(2)$ группы вращения – они должны быть антисимметричными. Но $[\Gamma]_1$ и $[R^a{}_b]_{12}$ не антисимметричны!

B. Контрпример 2: абсолютный параллелизм на сфере S^3 и статическая вселенная Эйнштейна

Контрпример связан с геометрией эйнштейновской статической вселенной. Мы формулируем его следующим образом: параллелизуемыми сферами являются лишь S^1, S^3 и S^7. Нас интересует S^3, групповое многообразие группы Ли $SU(2)$, как пространственная часть четырёхмерного многообразия пространства-времени $S^3 \times \mathbb{R}$. Накахара [14, p. 220] описывает параллелизм S^3, используя левоинвариантные векторные поля натурального действия единичных кватернионов. Группа $SU(2)$ параметризуется как

$$\begin{aligned} U(Z_1, Z_2) = &\begin{bmatrix} Z_1 & -\bar{Z}_2 \\ Z_2 & \bar{Z}_1 \end{bmatrix}, \\ &Z_1 = X_1 + iX_2,\ Z_2 = X_3 + iX_4, \\ &X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 = 1. \end{aligned} \tag{V.16}$$

Давайте введём гиперсферические координаты x_1, x_2, x_3, с $x_3 \in (0, \pi/2)$, $x_1, x_2 \in [0, 2\pi)$, следующим образом

$$\begin{aligned} X_1 &= \cos x_1 \cos x_3, \\ X_2 &= \sin x_1 \cos x_3, \\ X_3 &= \cos(x_1 + x_2) \sin x_3, \\ X_4 &= \sin(x_1 + x_2) \sin x_3, \end{aligned} \tag{V.17}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \arctan X_2/X_1, \\ x_2 &= \arctan \frac{X_1X_4 - X_2X_3}{X_1X_3 + X_2X_4}, \\ x_3 &= \arctan \sqrt{\frac{X_3^2 + X_4^2}{X_1^2 + X_2^2}}. \end{aligned} \tag{V.18}$$

Затем мы определяем четыре векторных поля e_a, три из которых являются левоинвариантными (фундаментальными) векторными полями на $S^3 \approx SU(2)$:

$$e_0 = \partial_0, \tag{V.19}$$

$$\begin{aligned} e_1 = &-\cos(2x_1 + x_2) \tan x_3\, \partial_1 \\ &+ \cos(2x_1 + x_2) \csc x_3 \sec x_3\, \partial_2 \\ &+ \sin(2x_1 + x_2)\, \partial_3, \end{aligned} \tag{V.20}$$

$$\begin{aligned} e_2 = &-\sin(2x_1 + x_2) \tan x_3\, \partial_1 \\ &+ \sin(2x_1 + x_2) \csc x_3 \sec x_3\, \partial_2 \\ &- \cos(2x_1 + x_2)\, \partial_3, \end{aligned} \tag{V.21}$$

$$e_3 = \partial_3. \tag{V.22}$$

Траектории векторных полей e_1, e_2 показаны на рис. 2, 3.

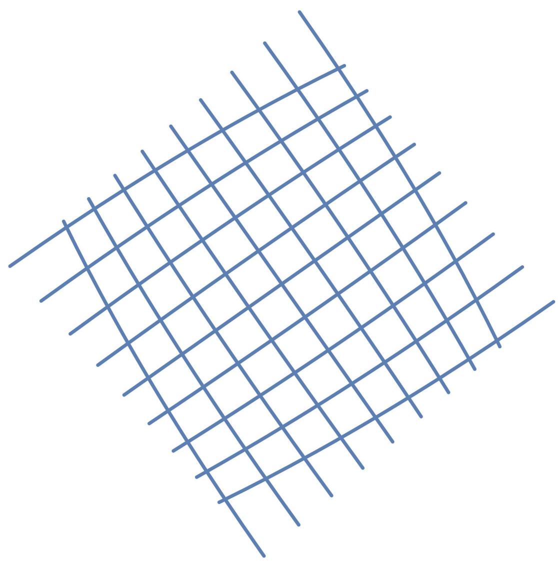

Рис. 2. Траектории e_1 и e_2 возле точки $(0, 0, 0, -1)$ на S^3, спроектированной стереографически на $\mathbb{R}^3$, если смотреть из точки на оси x в $\mathbb{R}^3$. Они выглядят как регулярная координатная сетка.

Remark 5.1: Координаты (x_1, x_2, x_3) не очень пригодны для описания геометрии левоинвариантных векторных полей – формулы ниже совсем не просты.

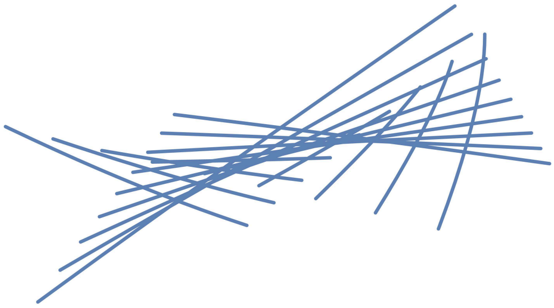

Рис. 3. Те же траектории, видимые под другим углом. Можно видеть, что прямоугольники, образованные линиями поля, не замкнуты из-за кручения

Фактически эти координаты хорошо адаптированы к геометрии правоинвариантных векторых полей. Тем не менее, преимуществом наших координат является то, что координатные линии x_1 являются геодезическими - см. рис. 4.

Тогда

$$[e_1, e_2] = 2\, e_3,\ [e_2, e_3] = 2\, e_1,\ [e_3, e_1] = 2\, e_2, \qquad \text{(V.23)}$$

все остальные скобки Ли нулевые.[12]

Метрика; сигнатура $(1, -1, -1, -1)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0, \\ 0 & -1 & -\sin^2 x_3 & 0 \\ 0 & -\sin^2 x_3 & -\sin^2 x_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \qquad \text{(V.24)}$$

Ненулевые (голономные) коэффициенты связности Леви-Чивиты Γ^i_{jk}:

$$\begin{aligned} &\Gamma^1_{13} = \Gamma^1_{31} = -\tan x_3, \quad \Gamma^2_{23} = \Gamma^2_{32} = \cot x_3, \\ &\Gamma^2_{13} = \Gamma^2_{31} = \sec x_3 \csc x_3, \\ &\Gamma^3_{12} = \Gamma^3_{21} = \Gamma^3_{22} = -\sin x_3 \cos x_3. \end{aligned} \qquad \text{(V.25)}$$

Ненулевые (голономные) компоненты тензора римановой кривизны связности Леви-Чивиты: $R^i{}_{jkm} = \nabla_k \Gamma^i_{jm} - \nabla_m \Gamma^i_{jk}$:

$$\begin{aligned} R^1{}_{112} &= -R^1{}_{121} = R^1{}_{212} = -R^1{}_{221} = -R^2{}_{212} \\ &= R^2{}_{221} = -R^3{}_{123} = R^3{}_{132} = -R^3{}_{213} \\ &= -R^3{}_{223} = R^3{}_{231} = R^3{}_{232} = \sin^2 x^3, \\ R^1{}_{313} &= -R^1{}_{331} = -R^2{}_{112} = R^2{}_{121} = R^2{}_{323} \\ &= -R^2{}_{332} = -R^3{}_{113} = R^3{}_{131} = 1. \end{aligned} \qquad \text{(V.26)}$$

Ненулевые (голономные) коэффициенты связности абсолютного параллелизма Δ^i_{jk}:

$$\begin{aligned} &\Delta^1{}_{23} = -\Delta^1{}_{32} = -\frac{1}{2}\Delta^1{}_{31} = \tan x_3, \\ &\Delta^2{}_{23} = \cot x_3 - \tan x_3, \\ &\Delta^2{}_{32} = \frac{1}{2}\Delta^2{}_{31} = \sec x_3 \csc x_3, \\ &\Delta^3{}_{21} = -\sin 2x_3, \\ &\Delta^3{}_{22} = -\sin x_3 \cos x_3. \end{aligned} \qquad \text{(V.27)}$$

[12]Дискуссия в [14, p. 220] вводит в заблуждение. То, что он вычисляет, является частью скобок Ли, а не коэффициентами связности, как утверждается. В результате его кручение имеет неверный знак.

Ненулевые (голономные) коэффициенты $\mathscr{T}^i{}_{jk}$ кручения связности абсолютного параллелизма Δ^i_{jk}: Ненулевое (голономное) кручение: $\mathscr{T}^i{}_{jk} = \Delta^i{}_{kj} - \Delta^i{}_{jk}$:

$$\begin{aligned} &\mathscr{T}^1{}_{31} = -\mathscr{T}^1{}_{23} = -\mathscr{T}^1{}_{13} = \mathscr{T}^1{}_{32} = 2\tan x^3, \\ &\mathscr{T}^2{}_{13} = -\mathscr{T}^2{}_{31} = 2\sec x^3 \csc x_3, \\ &\mathscr{T}^2{}_{32} = -\mathscr{T}^2{}_{23} = \cot x_3 - \sec x_3 \csc x_3 - \tan x_3, \\ &\mathscr{T}^3{}_{21} = -\mathscr{T}^3{}_{12} = \sin 2x_3 \end{aligned} \qquad \text{(V.28)}$$

Ненулевые (голономные) коэффициенты $T^i{}_{jk}$ контορсии: $T^i{}_{jk} = \Delta^i{}_{jk} - \Gamma^i_{jk}$:

$$\begin{aligned} &T^1{}_{13} = T^1{}_{23} = -T^1{}_{31} = -T^1{}_{32} = -T^2{}_{23} = T^2{}_{32} \\ &\quad = \tan x^3, \\ &T^2{}_{13} = -T^2{}_{31} = -\sec x_3 \csc x_3, \\ &T^3{}_{12} = -T^3{}_{21} = \sin x_3 \cos x_3 \end{aligned} \qquad \text{(V.29)}$$

Remark 5.2: Обратите внимание, что симметричная часть тензора контορсии исчезает: $T^i_{(jk)} = 0$. Поэтому геодезические связности Леви-Чивиты соответствуют автопараллелям связности $\overset{\star}{\nabla}$ абсолютного параллелизма, генерируемой левоинвариантными векторными полями – см. рис. 4. Фактически эти геодезические являются траекториями одно-параметрической подгруппы правого действия $SU(2)$ на S^3. Левые действия, с другой стороны, генерируют векторные поля геометрии Киллинга.

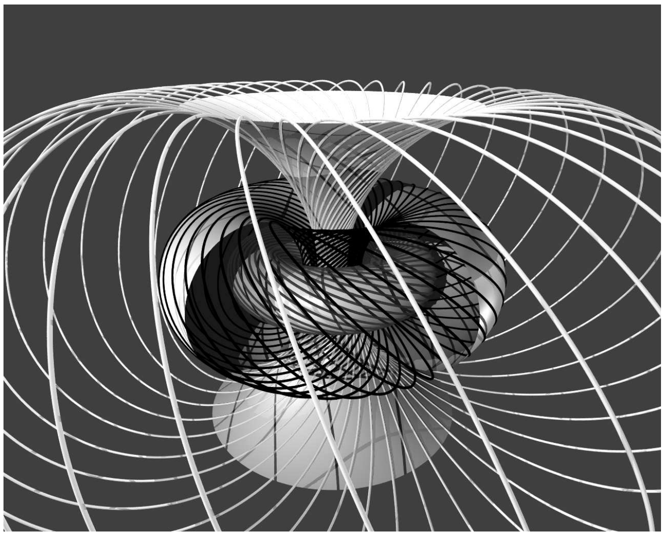

Рис. 4. Стереографическая проекция поверхностей постоянных координат x_3 для $x_3 = \pi/8, \pi/4, 3\pi/8$. Окружности являются геодезическими – координатные линии x_1. Каждая окружность представляет один слой в “Расслоении Хопфа” $S^3 \to S^2$. Более детально, а также в связи с состояниями квантового спина 1/2 см. [30, p. 60-68].

1) $\Gamma^a{}_b$ и $R^a{}_b$ в параллельной (неголономной) системе координат вычисляются так же, как в Книге: я не буду давать результат вычислений четырёх матриц $[\Gamma^a{}_b]_i$, $(i = 0, ..., 3)$ и шести матриц $[R^a{}_b]_{ij}$, вычисленных согласно правилам, данным в Книге. Это заняло бы две страницы и результат был бы всё равно не имеющим смысла. Правильные простые значения – в уравнениях (V.31), (V.32), V.33). Позвольте мне дать лишь для примера одну компоненту для каждой, *которая должна быть нулевой для любой антисимметричной матрицы, но которая не равна нулю:*

$$[\Gamma^1{}_1]_3 = -\cos^2(2x_1+x_2)\cos(2x_3)\csc(2x_3)\sec(2x_3),$$
$$[R^1{}_1]_{13} = -2\cot(2x_3)\sin(2x_1+x_2) \qquad \text{(V.30)}$$

C. Почему это плохо?

Почему это плохо, и всё ли плохо? Да, формула ((5.513)) хороша, но и это всё, что есть хорошего в этом разделе Книги, где мы ожидали бы замены голономного, неортонормированного базиса неголономным, но нормированным базисом, и таким образом, трансформировать интересующие нас величины, так чтобы они имели значения в алгебре Ли лоренцевой группы $O(3,1)$. Это и есть весь трюк при формулировании гравитационных теорий как калибровочных теорий группы Лоренца или Пуанкаре - и именно этой идеи касаются рассматриваемые разделы Книги. Однако *ни коэффициенты $\Delta^a{}_b$ телепараллельной связности, ни коэффициенты $\Gamma^a{}_b$ связности Леви-Чивиты (и, как следствие, коэффициенты $R^a{}_b$ римановой кривизны связности Леви-Чивиты) не имеют значения в алгебре Ли лоренцовой группы.* В двух контрпримерах, со связностью навигатора, и с параллелизуемой S^3, это видно из формы матриц $[\Gamma^a{}_b]$ и $R^a{}_b$. Эти матрицы, как бесконечно малые генераторы вращения, должны быть *антисимметричными*, но таковыми не являются. Как результат – *ни одно из уравнений* $((B)), ((C)), ((D))$ *в таблице V.1 не верно.* $((A))$ также неверно, хотя, как я поясню ниже, по другим причинам.

D. Как это должно быть сделано?

Для "связности навигатора": $\Gamma^a{}_{bi}$ надо вычислять из формулы (IV.18), с результатом

$$[\Gamma^a{}_b]_1 = \left[\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right], \quad [\Gamma^a{}_b]_2 = \begin{bmatrix}0 & -\cos x^1\\ \cos x^1 & 0\end{bmatrix}. \qquad \text{(V.31)}$$

Затем для соответствующей кривизны $R^a{}_{bij}$ мы получим

$$[R^a{}_b]_{12} = -[R^a{}_b]_{21} = \begin{bmatrix}0 & \sin x^1\\ -\sin x^1 & 0\end{bmatrix}. \qquad \text{(V.32)}$$

Для геометрии $S^3\times\mathbb{R}$: ненулевая неголономная связность Леви-Чивиты $\Gamma^a{}_{bc}$ и её тензор римановой кривизны (приведена только пространственная часть, временная часть тривиальна) со значениями в алгебре Ли $so(3)$ будут

$$[\Gamma^a{}_b]_1 = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{bmatrix}, [\Gamma^a{}_b]_2 = \begin{bmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix},$$
$$[\Gamma^a{}_b]_3 = \begin{bmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}, [R^a{}_b]_{12} = \begin{bmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$
$$[R^a{}_b]_{13} = \begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{bmatrix}, [R^a{}_b]_{23} = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{bmatrix}. \qquad \text{(V.33)}$$

Заметим дополнительно, что $R^a{}_{bcd} = -R^a{}_{bdc}$.

Обе они антисимметричны, как и должно быть. $\Delta^a{}_b$ *должен быть тождественно равным нулю (мы в параллельной системе координат!).* После этого структурные уравнения и тождества Бьянки могут быть просто скопированы из многочисленных книг.

E. Что ещё плохо?

Теперь, зная, что есть $\Delta^a{}_b$ и что есть $T^a{}_b$, мы можем вывести определение $\Gamma^a{}_b = \Delta^a{}_b - T^a{}_b$. Элементарные вычисления приводят к

$$\Gamma^a{}_{bk} = e^a_i(e^j_b\,\Gamma^i_{jk} + 2\,e^i_{b,k}). \qquad \text{(V.34)}$$

Если знак определения $\Delta^a{}_b$ будет обратным, неверный второй член исчезнет, но даже тогда, сравнивая написанное выше с правильной формулой (IV.18), мы увидим, что определение $\Gamma^a{}_b$ хромает. В этот раз, однако, первый член правильного определения будет потерян.

Удивительно, что знак простого выражения (A) также неверен. Выражение в Книге (стр. 23, внизу) гласит:

$$de - e\wedge T = 0, \qquad \text{(V.35)}$$

что дальше развито в утверждении 5.8 до

$$de^a - e^c\wedge T^a{}_c = 0. \qquad \text{((5.84))}$$

Мы имеем

$$(de^a)_{ij} = \partial_i\, e^a_j - \partial_j\, e^a_i, \qquad \text{(V.36)}$$

и, используя определение ((5.113))

$$\begin{aligned}(e^c\wedge T^a{}_c)_{ij} &= e^c_i\, T^a{}_{cj} - e^c_j\, T^a{}_{ci}\\ &= e^c_i\, e^k_c\,\nabla_j\, e^a_k - e^c_j\, e^k_c\,\nabla_i\, e^a_k\\ &= \nabla_j\, e^a_i - \nabla_i\, e^a_j = \partial_j\, e^a_i - \partial_i\, e^a_j. \end{aligned} \qquad \text{(V.37)}$$

Поэтому правильная формула (A) будет

$$de^a + e\wedge T = 0. \qquad \text{(V.38)}$$

Снова мы имеем ошибку в знаке.

VI. Заключение

Кручение пространства-времени и его взаимодействие с вращающейся материей - старая тема, но сегодня она релевантна как 80 лет назад, наверное, даже больше (для современного введения см. [31]); это может стать даже более важным в будущем. В недавней публикации [32], озаглавленной "Перспективы детектирования кручения пространства-времени" Путцфельд и Обухов замечают: "Неожиданным свойством неминимальных теорий оказывается их потенциальная чувствительность к кручению пространства-времени даже в экспериментах с обычной (не микроструктурной) пробной материей".

Однако, математика кручения более продвинутая и более тонкая, чем это необходимо в стандартной ОТО. Математик Эли Картан, в своём письме 1932 г. писал Эйнштейну [33, p. 231]:

> " *Дорогой и прославленный мэтр,*
> Ваше письмо наполняется меня и радостью и смущением. Конечно, я получаю удовольствие от нашей маленькой переписки, и, если бы я мог, я бы хотел снова стать молодым, и если не прочитать вам лекции, то по крайней мере проследить лучше, чем я могу это сейчас, все

удивительные вещи, которые были сделаны в физике. (...)”

В заключение: в этих заметках я проанализировал математическую часть “Теории физического вакуума” Г.И. Шипова, Главу 5, и указал на многочисленные ошибки. Я также привёл правильный способ обращения с данной темой. Я надеюсь, что эти комментарии можно рассматривать как дополнительные к довольно поверхностной рецензии В.А. Рубакова [34], который написал, что Книга содержит “хорошо известные геометрические построения” и “множество ошибок”, но который, по всей видимости, даже не попытался понять, о чём эти формулы. В результате очевидные математические несоответствия избежали его внимания. Современная теоретическая физика требует продвинутой математики, и любой, кто использует такие математические инструменты, должен, прежде всего, ясно понимать значение математических операций и формул. В противном случае будут преобладать путаница и неправильная интерпретация.

VII. Благодарности

Выражаю глубокую благодарность В.А. Жигалову за поддержку замысла этой статьи и за перевод с английского, а также Д.Н. Куликову за полезные советы.

Список литературы

[1] G. I. Shipov. *A Theory of Physical Vacuum.* RANS, Moskow, 2 edition, 1998. Шипов Г. И., *Теория физического вакуума*, Изд. второе, Москва, Наука, 1997.

[2] A. Bruhn, G. W.and JBruhn and F. W. Hehl. Comments on ‘spin connection resonance in gravitational general relativity’. *Acta Physica Polonica B*, 39(1):51–58, 2008.

[3] R. Coquereaux and A. Jadczyk. *Riemannian Geometry, Fiber Bundles, Kaluza-Klein Theories and all that ...* World Scientific, 1988.

[4] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of Differential Geometry.* Wiley, 1996. Кобаяши С., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии*, Том. 1, Москва, Наука, 1981.

[5] Y. Choquet-Bruhat and C. DeWitt-Morette. *Analysis, Manifold and Physics, Part II: 92 Applications.* North-Holland, 1989.

[6] P. B. Eguchi, T.and Gilkey and A. J. Hanson. Gravitation, gauge theories and differential geometry. *Phys. Rep.*, 66(6):213–293, 1980.

[7] S. S.and Chen Chern and K. S. W. H., Lam. *Lectures on Differential Geometry.* World Scientific, 2000.

[8] R. L. Bishop and R. J. Crittenden. *Geometry of Manifolds.* AMS Chelsea Publ., 2001. Бишоп Р.Л., Криттенден Р.Дж. *Геометрия многообразий*, Москва, Мир, 1967.

[9] R. Sulanke and P. Wintgen. *Differentialgeometrie und Faserbündel.* Birkhäuser, 1972. Зуланке Р., Винтген П. *Дифференциальная геометрия и расслоения*, Москва, Мир, 1975.

[10] A. Lichnerowicz. *Global Theory of Connections and Holonomy Groups.* Noordhoff, 1976. Лихнерович А. *Теория связностей в целом и группы голономий*, Москва, Изд-во иностранной литературы, 1960.

[11] J. Dieudonné. *Treatise on Analysis, Vol. IV.* Academic Press, 1974.

[12] W. Greub, S. Halperin, and R. Vanstone. *Connections, Curvature and Cohomology, Vol. II.* Academic Press, 1973.

[13] T. Frankel. *The Geometry of Physics.* CUP, 1997.

[14] M. Nakahara. *Geometry, Topology and Physics.* IOP Publ., 1990.

[15] B. A. Dubrovin, A. T. Fomenko, and S. P. Novikov. *Modern Geometry - Methodas and Applications, Part II. The Geometry and Topology of Manifolds.* Springer, 1985. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. *Современная геометрия*, Москва, Наука, 1979.

[16] Charles W Misner, Kip S Thorne, and John Archibald Wheeler. *Gravitation.* W H Freeman and Company, 1973. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. *Гравитация, Том 1*, Москва, Мир, 1977.

[17] S. Sternberg. *Lectures on Differential Geometry.* Prentice-Hall, 1964. Стернберг С. *Лекции по дифференциальной геометрии*, Москва, Мир, 1970.

[18] J. A. Schouten. *Ricci Calculus.* Springer, 2 edition, 1954.

[19] F. W. Hehl. How does one measure torsion of space-time ? *Phys. Lett. A*, 36:225–226, 1971.

[20] P. Hehl, F. W.and von der Heyde and G. D. Kerlick. General relativity with spin and torsion: Foundations and prospects. *Rev. Mod. Phys.*, pages 393–416, 1976.

[21] F. W. Hehl. Four lectures on poincaré gauge field theory. In P. Berman and V. De Sabbata, editors, *Cosmology and Gravitation*, NATO Advanced Study Institutes Series, 1980.

[22] Шипов Г.И. *Геометрия абсолютного параллелизма.* Наука, 1997.

[23] G. I. Shipov. Absolute parallelism geometry, ricci and cartan torsions. http://shipov.com/files/Ricci_Cartan.pdf.

[24] G. I. Shipov. Descartesian mechanics: the fourth generalization of newton’s mechanics. http://shipov.com/files/250206_dmf.pdf.

[25] Шипов Г.И. Всеобщая относительность и квантовая механика. http://www.trinitas.ru/rus/doc/0231/003a/02310011.htm.

[26] J. Favard. *Cours de Géomeétrie Différentielle Locale.* Gauthier-Villars, 1957. Фавар Ж. *Курс локальной дифференциальной геометрии*, Москва, Изд-во иностранной литературы, 1960.

[27] J. A. Schouten. *Tensor Analysis for Physicists.* Dover, 1989. Схоутен Я.А., *Тензорный анализ для физиков*, Москва, Наука, 1965.

[28] Шипов Г.И. Беседы о новой торсионной механике, Беседа 8. http://shipov.com/files/lesson8.pdf.

[29] V. V. Fernández and W. A. Rodrigues Jr. *Gravitation as a Plastic Distortion of the Lorentz Vacuum.* Springer, 2010.

[30] A. Jadczyk. *Quantum Fractals : From Heisenberg’s Uncertainty to Barnsley’s Fractality.* World Scientific, 2014.

[31] R. Aldrovandi and J. G. Pereira. *Teleparallel Gravity: An Introduction.* Springer, 2013.

[32] D. Puetzfeld and Y. Obukhov. Prospects of detecting spacetime torsion, May 2014. http://arxiv.org/abs/1405.4137.

[33] Elie Cartan and Albert Eintsein. *Letters on Absolute Parallelism 1929-1932.* Princeton University Press, 1979.

[34] V. A. Rubakov. The theory of physical vacuum. theory, experiments, and technologies by g i shipov. *Physics-Uspekhi*, 43:309–310, 2000. Рубаков В.А. О книге Г.И.Шипова “Теория физического вакуума. Теория, эксперименты и технологии”, УФН, 170(3), 2000, с. 351-352.